



Electronique des Systèmes d'acquisition et de calcul

ELEC101 - ESAC: Filtrage

Institut Mines Telecom
Année scolaire 2023-2024



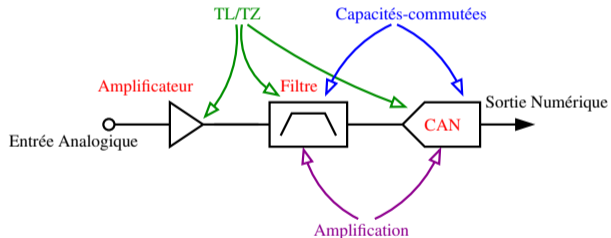
Objectif et plan

Objectifs :

- Evaluer la complexité d'un filtre à partir de ses spécifications
- Connaître les types de filtres usuels et leurs limitations

Plan :

- Introduction, applications
- Spécifications des filtres
 - Fonction de transfert
 - Gabarits
- Approximations standards
 - Prototype
 - Transformations sur le prototype
- Types de filtres





Outline

Introduction, applications

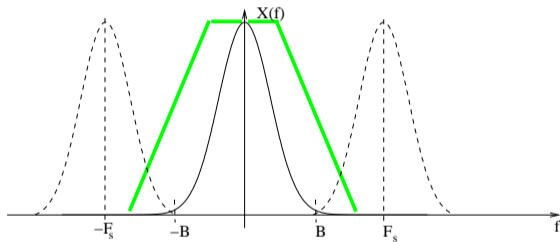
Spécifications des filtres

Approximations standards

Types de filtres

Limitation du spectre avant échantillonnage

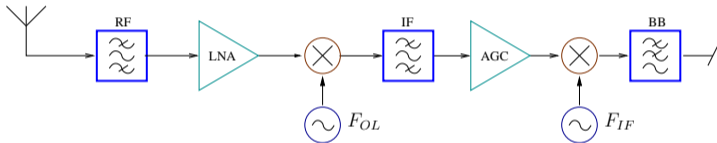
$$x_d(t) = x(t) \cdot T_s \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - k T_s) \Rightarrow X_d(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(f - k F_s)$$



Pour pouvoir échantillonner à une fréquence $F_s = 2B$ (Nyquist-Shannon) on doit garantir que le spectre du signal d'entrée n'a pas de composantes supérieures à B . Ceci est généralement assuré par un filtre appelé filtre anti-repliement.

Sélection d'un canal radio

Les filtres analogiques sont également utilisés pour sélectionner une partie du spectre d'un signal. C'est par exemple le cas lorsqu'une bande de fréquences est utilisée dans un système radio :



le filtrage est réparti dans la chaîne de réception sur un ensemble de filtres (RF,IF,BB). La technologie utilisée pour ces différents filtres est étroitement liée à la fréquence du signal à traiter.



Outline

Introduction, applications

Spécifications des filtres

Fonction de transfert

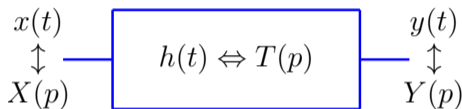
Gabarits

Approximations standards

Types de filtres

Fonction de transfert

Un filtre linéaire est décrit de façon générale par sa réponse impulsionnelle $h(t)$. La transformée de Laplace $T(p)$ de $h(t)$, $T(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$ est la fonction de transfert du filtre.



$$\underbrace{\sum_j i_{kj} = 0}_{\text{Lois topologiques}}$$

Lois topologiques

et
$$\underbrace{i = C \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow I(p) = CpV(p)}_{\text{Equations de constitution}}$$

$$T(p) = \frac{\prod_{j=1}^m (p - z_j)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)}$$

p_i : pôles

z_j : zéros

n : ordre du filtre

Réponse transitoire et harmonique

Considérons une entrée sinusoïdale à la pulsation ω :

$$x(t) = e^{j\omega t} \cdot \mathbf{1}_{\{t>0\}} \Leftrightarrow \mathcal{L}\{x(t)\} = X(p) = \frac{1}{p-j\omega}$$

$$Y(p) = T(p) \cdot X(p) = \frac{N(p)}{\prod_{i=1}^n (p-p_i)} \cdot \frac{1}{p-j\omega} = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{p-p_i} + \frac{C_{n+1}}{p-j\omega}$$

$$C_{n+1} = [T(p)]_{p=j\omega} = T(j\omega)$$

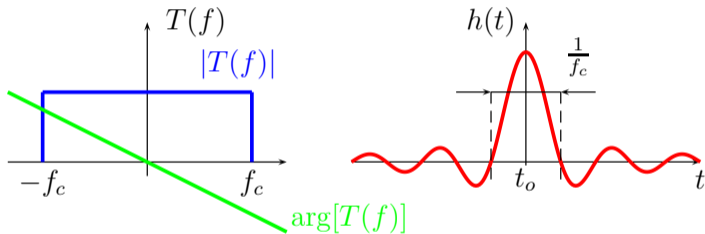
$$y(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t} + T(j\omega) e^{j\omega t}$$

Réponse transitoire

Réponse harmonique

Exemple : filtre passe-bas idéal

$$T(f) = \exp(-j2\pi ft_o) \cdot \mathbf{1}_{\{-f_c, f_c\}}$$



$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T(f) \cdot \exp(j2\pi ft) df = 2 f_c \cdot \text{sinc}\{2\pi f_c(t - t_o)\}$$

Contraintes sur la fonction de transfert

■ Stabilité :

La réponse transitoire est normalement une réponse évanescence. Pour qu'il en soit effectivement ainsi, on doit satisfaire au critère de stabilité de la fonction de transfert :

$$\text{Stabilité : } m \leq n \quad \text{Re}(p_i) < 0$$

■ Causalité :

Le théorème de Paley-Wiener stipule que la fonction de transfert T d'un filtre causal doit être telle que :

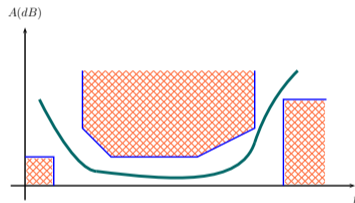
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |T(f)||}{1 + f^2} df < \infty$$

On ne peut pas annuler le module de $T(f)$ sur une bande de fréquence aussi petite soit elle.

Gabarits d'affaiblissement

L'affaiblissement du filtre est généralement exprimé en dB :

$$A(\omega) = -20 \log_{10} |T(j\omega)|$$

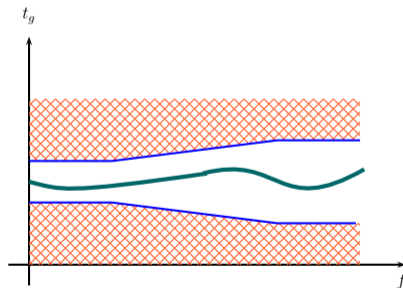


Gabarits de temps de propagation de groupe

La phase fait intervenir une fonction transcendante.

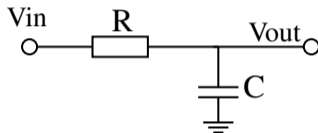
On préfère utiliser le *temps de propagation de groupe* :

$$t_g(\omega) = -\frac{\partial \arg[T(j\omega)]}{\partial \omega}$$



Exercice 1 : filtre RC

We have the following RC filter :



- Calculer la fonction de transfert $T(p) = \frac{V_{out}(p)}{V_{in}(p)}$
- Le filtre est-il stable ?
- Déterminer les expressions de l'atténuation et du retard de groupe.
- Tracer-les pour un $R = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 1 \text{ nF}$.



Outline

Introduction, applications

Spécifications des filtres

Approximations standards

Prototype

Transformations sur le prototype

Types de filtres

Approximations standards

Les approximations standards sont basées sur la construction d'un filtre passe-bas normalisé en amplitude et en fréquence, dit le filtre prototype, définie par une fonction caractéristique Ψ_n .

L'approche consiste à ramener toute construction de filtres à un filtre passe bas normalisé.

- On transpose le gabarit du filtre voulu à un gabarit d'un filtre pas normalisé (bande utile égale à 1)
- On calcule sur le filtre prototype. (ordre, fréquence de coupure, fonction de transfert ...)
- Une re-transposition en fréquence et en type de filtrage si nécessaire (par ex : passe bas à passe haut) pour construire le filtre voulu à partir du filtre passe bas prototype

L'avantage de cette approche est que les séries d'approximation standard et les fonctions de transfert associées sont juste définies pour le cas le plus simple : **filtre passe bas avec une bande de passante de 1.**

Approximations standards-suite

Afin de faire la différence entre le domaine de Laplace original et le domaine de Laplace normalisé, on introduit S

$$S = \Sigma + j \Omega, \text{ équivalente à } p = \sigma + j \omega$$

Par construction, pour tous les filtres à base d'approximation standard

- l'atténuation peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$A(\Omega) = 10 \log_{10}[1 + \epsilon^2 \Psi_n^2(\Omega)] \quad , \quad |T(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \Psi_n^2(\Omega)}$$

avec n l'ordre du filtre et ϵ une constante qui permet de l'ajuster en fonction des atténuations A_{min} et A_{max} requises.

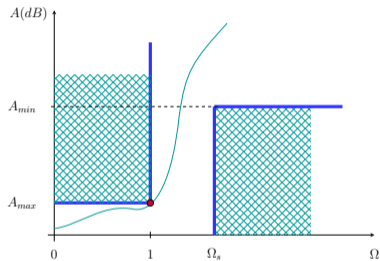
- La fonction Ψ_n est unitaire pour $\Omega = 1$

$$\Psi_n(1) = 1$$

Définition du filtre prototype passe bas

Pulsations normalisées

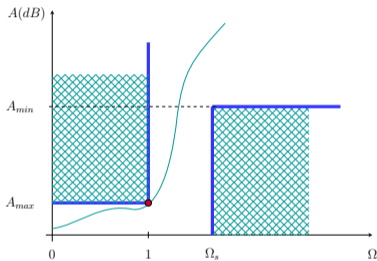
A_{max} et A_{min} égales à celles d'origine



Définition du filtre prototype passe bas

Pulsations normalisées

A_{max} et A_{min} égales à celles d'origine



$$A(1) = 10 \log_{10}(1 + \epsilon^2 \Psi_n(1)^2) \leq A_{max}$$

$$\epsilon \leq \sqrt{10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1}$$

$$A(\Omega_s) = 10 \log_{10}(1 + \epsilon^2 \Psi_n(\Omega_s)^2) \geq A_{min}$$

$$\epsilon \geq \sqrt{\frac{10^{\frac{A_{min}}{10}} - 1}{\Psi_n^2(\Omega_s)}}$$

Pour déterminer l'ordre n requis, il suffit de faire le rapport

$$\Psi_n(\Omega_s) \geq \sqrt{\frac{10^{A_{min}/10} - 1}{10^{A_{max}/10} - 1}} = D$$

Approximation sur le prototype

Approximations classiques sur le module de la fonction de transfert :
On peut distinguer deux classes particulières selon la forme polynômiale ou rationnelle de la fonction caractéristique.

■ Approximations polynômiales

- Approximation de Butterworth : $\Psi_n(\Omega) = \Omega^n$
- Approximation de Tchebycheff : $\Psi_n(\Omega) = T_n(\Omega)$
 T_n : polynôme de Tchebycheff d'ordre n

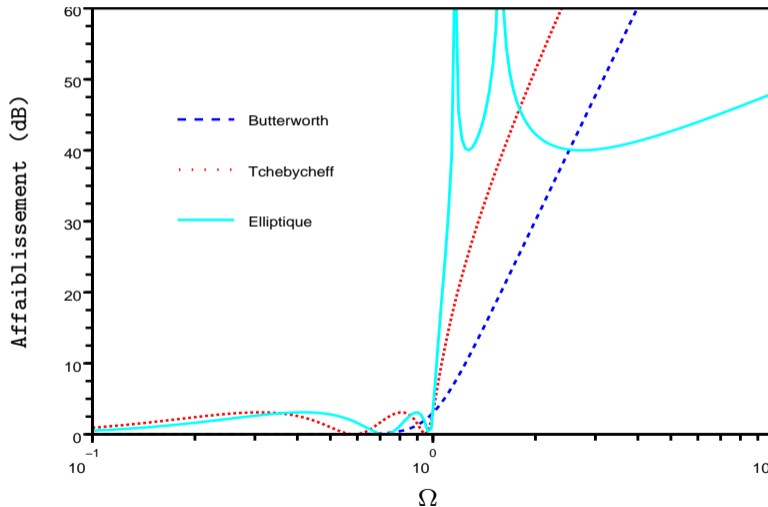
■ Approximations rationnelles

- Tchebycheff en bande atténuée : $\Psi_n(\Omega) = \frac{T_n(\Omega_s)}{T_n(\frac{\Omega_s}{\Omega})}$
- Approximation de Cauer ou Elliptique :

n pair	n impair
$\Psi_n(\Omega) = C_1 \prod_{i=1}^{n/2} \frac{\Omega^2 - \Omega_{oi}^2}{\Omega^2 - \Omega_{zi}^2}$	$\Psi_n(\Omega) = C_2 \Omega \prod_{i=1}^{n-1/2} \frac{\Omega^2 - \Omega_{oi}^2}{\Omega^2 - \Omega_{zi}^2}$
$\Omega_{oi} \cdot \Omega_{zi} = \Omega_s$	

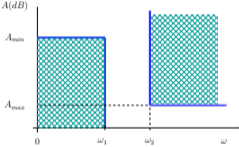
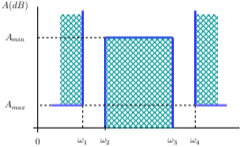
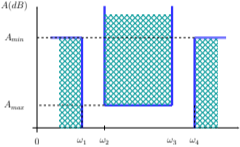
Approximation sur le prototype

Exemples d'approximation standard ($n=5$, $A_{max}=3$ dB)



Transformations de fréquences

Principales transformations $S = f(p)$ sur le prototype :

(1) passe-haut :	(2) réjecteur :	(3) passe-bande :
 $S = \frac{\omega_2}{p}$ $\Omega_s = \frac{\omega_2}{\omega_1}$	 $S = \frac{B}{\omega_0} \left[\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right]^{-1}$ $B = \omega_4 - \omega_1$ $\Omega_s = \frac{\omega_4 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_2}$ <p>Contrainte : $\omega_1 \cdot \omega_4 = \omega_2 \cdot \omega_3 = \omega_0^2$</p>	 $S = \frac{\omega_0}{B} \left[\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right]$ $B = \omega_3 - \omega_2$

Méthodologie construction filtre avec approx. standard

1 - Quels sont les besoins exacts en filtrage ? (application visée)

2 - Tracer le gabarit avec $A_{min}, A_{max}, f_1, \dots$

3 - Tracer le gabarit du filtre passe bas prototype (calcul de Ω_s)

4 - Choix approx. et calcul de l'ordre avec : $\psi_n(\Omega_s) \geq D = \sqrt{\frac{10^{\frac{A_{min}}{10}} - 1}{10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1}}$

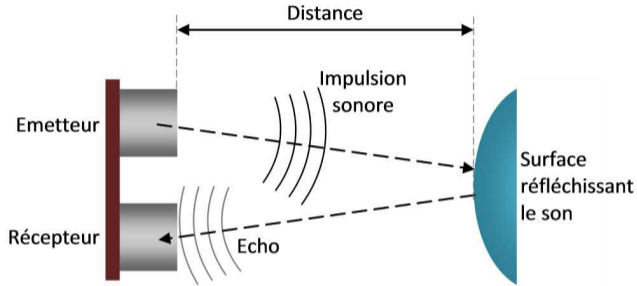
5 - Relever la fonction de transfert pour l'ordre et l'approx. voulus

6 - Calculer la plage de ϵ : $\sqrt{\frac{10^{\frac{A_{min}}{10}} - 1}{\psi_n(\Omega_s)^2}} \leq \epsilon \leq \sqrt{10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1}$

7 - Adapter le filtre au ϵ choisi avec la trans. $S_N \rightarrow S \cdot \epsilon^{\frac{1}{n}}$

8 - App. la trans. du filtre prototype au filtre cible (passe bas, haut ...)

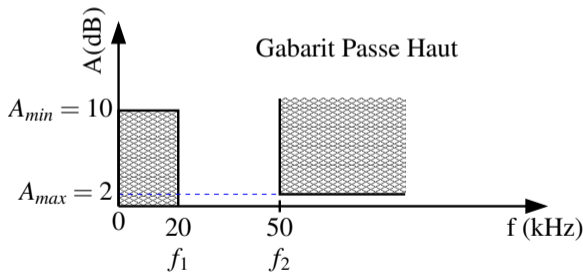
Etape 1 : Quels sont les besoins



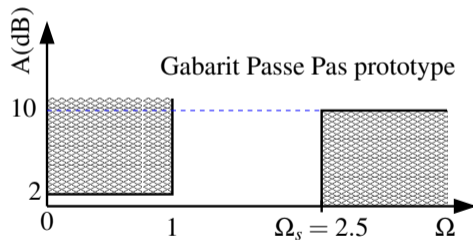
Scenario : Lara souhaite utiliser un capteur ultrason pour faire des mesures de distance mais a des problèmes de précision. Lara appelle son ami Fabian à la rescousse. Après analyse du problème, il conclut que les incertitudes des mesures sont dues aux fréquences audibles ($f < 20$ kHz).

Etapes 2 et 3 : Gabarits du filtre passe haut et du filtre prototype

Etape 2 : Pour atténuer ces fréquences, on décide d'utiliser un filtre passe haut. Pour déterminer les spécifications de ce filtre, Lara et Fabian regardent les différents paramètres de l'application et concluent qu'ils peuvent se permettre une atténuation maximale inférieure à 2 dB dans la bande utile ($f > 50$ kHz). Par ailleurs, dans la bande atténuée ($f < 20$ kHz), l'atténuation minimale requise doit être de 10 dB.



Etape 2 : Gabarit du filtre passe haut



Etape 3 : Gabarit du filtre passe bas prototype

Etape 4 : Choix approx et calcul de l'ordre

Etape 4 : On décide d'utiliser une approximation de type Butterworth caractérisée par $\Psi_n(\Omega) = \Omega^n$.

Pour déterminer l'ordre, il suffit de résoudre l'équation suivante :

$$\Psi_n(\Omega_s) \geq D = \sqrt{\frac{10^{A_{min}/10} - 1}{10^{A_{max}/10} - 1}}$$

$$\Omega_s^n \geq \sqrt{\frac{10^{A_{min}/10} - 1}{10^{A_{max}/10} - 1}}$$

A. N. pour $A_{min} = 10$ dB $A_{max} = 2$ dB, et $\Omega_s = 2.5$

$$D = \sqrt{\frac{10^1 - 1}{10^{0.2} - 1}} = 3.92 \longrightarrow n > \frac{\log(D)}{\log(\Omega_s)} = 1.49$$

L'ordre est de 1,49 mais vu que l'ordre doit être entier $\longrightarrow n = 2$

Méthodologie construction filtre avec approx. standard

1 - Quels sont les besoins exacts en filtrage ? (application visée)

2 - Tracer le gabarit avec $A_{min}, A_{max}, f_1, \dots$

3 - Tracer le gabarit du filtre passe bas prototype (calcul de Ω_s)

4 - Choix approx. et calcul de l'ordre avec : $\psi_n(\Omega_s) \geq D = \sqrt{\frac{10^{\frac{A_{min}}{10}} - 1}{10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1}}$

5 - Relever la fonction de transfert pour l'ordre et l'approx. voulus

6 - Calculer la plage de ϵ : $\sqrt{\frac{10^{\frac{A_{min}}{10}} - 1}{\psi_n(\Omega_s)^2}} \leq \epsilon \leq \sqrt{10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1}$

7 - Adapter le filtre au ϵ choisi avec la trans. $S_N \rightarrow S \cdot \epsilon^{\frac{1}{n}}$

8 - App. la trans. du filtre prototype au filtre cible (passe bas, haut ...)

Etape 5 : Relever la fonction de transfert

Etape 5 : On relève la fonction de transfert dans la table de Butterworth

$$H_{\text{PasseBas-NormEnBande-Norm3dB}}(S_N) = \frac{1}{S_N^2 + \sqrt{2}S_N + 1}$$

Problème

Cette table est définie pour un A_{max} de 3 dB ou en d'autres termes pour une fréquence de coupure normalisée égale à 1.

Ordre	Numérateur	Dénominateur
1	1	$S_N + 1$
2	1	$S_N^2 + \sqrt{2}S_N + 1$
3	1	$(S_N + 1)(S_N^2 + S_N + 1)$

Table de Butterworth avec $A_{max} = 3$ dB

Etape 6 : Calculer la plage de ϵ

Solution

C'est grâce à la constante ϵ qu'on peut ajuster le filtre à nos besoins spécifiques.

On sait que $A(\Omega) = 10 \log_{10}(1 + \epsilon^2 \Psi_n^2(\Omega))$, en résolvant $A(\Omega = 1) < A_{max}$ et $A(\Omega = \Omega_s) > A_{min}$, on obtient

$$\sqrt{\left(\frac{10^{\frac{A_{min}}{10}} - 1}{\Psi_n^2(\Omega_s)}\right)} \leq \epsilon \leq \sqrt{10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1}$$

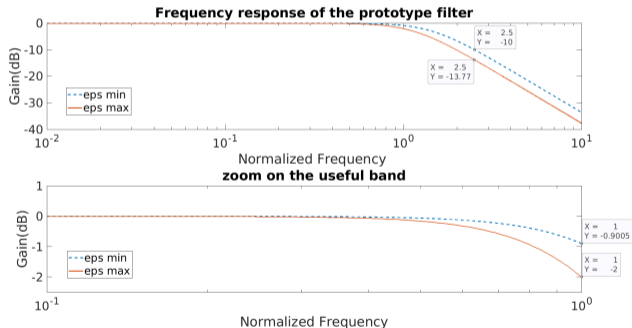
A.N. pour $A_{min} = 10$ dB, $A_{max} = 2$ dB, $\Omega_s = 2.5$, $n = 2$ et une approximation Butterworth

$$0.48 \leq \epsilon \leq 0.76$$

Etape 7 : Adapter le filtre au ϵ

Pour ajuster le filtre au ϵ choisi, $S_N \rightarrow S \cdot \epsilon^{\frac{1}{n}}$,

$$H_{\text{PasseBas-NormEnBande}}(S) = \frac{1}{\epsilon S^2 + \sqrt{2\epsilon}S + 1}$$

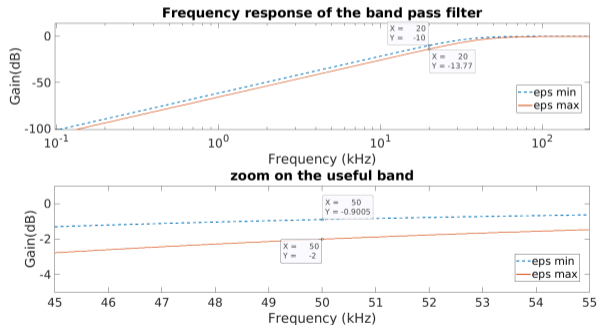


Réponse fréq. du filtre passe bas prototype pour ϵ_{\max} et ϵ_{\min}

Etape 8 : Trouver filtre cible

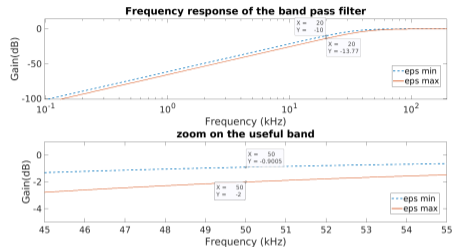
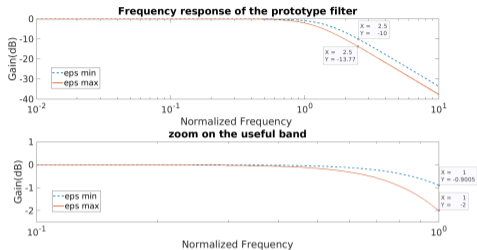
Pour construire le filtre passe haut : $S \rightarrow \frac{2\pi f_2}{p} = \frac{\omega_2}{p}$.

$$H_{\text{Passehaut}}(p) = \frac{p^2}{p^2 + \sqrt{2\epsilon\omega_2}p + \epsilon\omega_2^2}$$



Réponse fréq. du filtre passe haut pour ϵ_{max} et ϵ_{min}

Comparaison des 2 filtres



Les atténuations PH à $f_1=20$ kHz et $f_2 = 50$ kHz sont resp. égales à $\Omega=1$ et $\Omega = \Omega_s = 2.5$ pour le PB Prototype

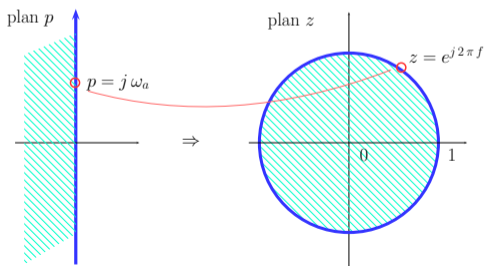
Cas discret : Transformation bilinéaire

Transformation univoque du plan p vers le plan z :

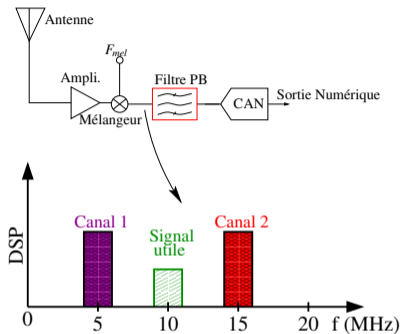
$$p = f(z) = \frac{2z - 1}{Tz + 1} \quad p = j\omega_a \rightarrow z = \frac{1 + j\frac{\omega_a T}{2}}{1 - j\frac{\omega_a T}{2}} = e^{j2\pi f_d T}$$

Transformation de l'axe des fréquences entre le prototype f_a et le filtre discret f_d :

$$\omega_a = \frac{2}{T} \tan(\pi f_d T)$$



Exercice 2 : Filtre pour récepteur ZigBee



- Canal 1 vs 2, quel serait le plus contraignant à filtrer ?
- Déterminer le gabarit du filtre passe-bande à sym. géom.
- Déterminer Ω_s et le gabarit prototype passe-bas.
- Calculer l'ordre du filtre prototype
- Proposer une implémentation pour le filtre.

Exercice 2 :Correction

Question 1 : Les filtres à symétrie géométrique doivent satisfaire :

$$f_1 \cdot f_4 = f_2 \cdot f_3$$

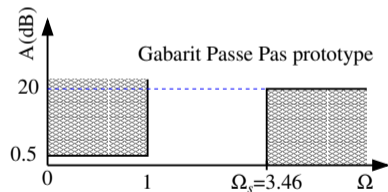
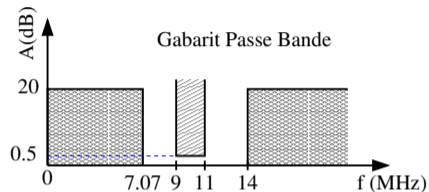
On sait que $f_2 = 9$ MHz et $f_3 = 11$ MHz.

Si on fixe f_1 à 6 MHz, $\rightarrow f_4 = 16.5$ MHz \rightarrow pas suffisant pour filtrer le canal 2

Alors que si on fixerons f_4 à 14 MHz $\rightarrow f_1 = 7.07 > 6$ MHz \rightarrow suffisant pour canal 1

Exercice 2 : Correction

Question 2 :



Question 3 : $\Omega_s = \frac{f_4 - f_1}{f_3 - f_2} = 3.46$

Exercice 2 :Correction

Question 4 :

$$\Psi_n(\Omega_s) = \Omega_s^n \geq D = \sqrt{\frac{10^{A_{min}/10} - 1}{10^{A_{max}/10} - 1}}$$

$$D = 28.48 \implies n \geq \frac{\log(D)}{\log \Omega_s} = 2.69 \implies n = 3$$

Question 5 : Comme le filtre passe bas prototype a un ordre 3, le filtre passe bande équivalent aura un ordre 6. Il pourra être implémenté en utilisant une cascade de 3 cellules passe bande ou une cascade d'une cellule passe bas, d'une cellule passe bande et d'une cellule passe haut (pas nécessairement dans cet ordre là)

Exercice 2 : Polynômes de Butterworth

Ordre	Numérateur	Dénominateur norm. pour bande passante à 3 dB
1	1	$S_N + 1$
2	1	$S_N^2 + 1.414S_N + 1$
3	1	$(S_N + 1)(S_N^2 + S_N + 1)$
4	1	$(S_N^2 + 0.765S_N + 1)(S_N^2 + 1.848S_N + 1)$

Conversion

- On part du polynôme normalisé correspondant à l'ordre voulu
- On calcule ϵ

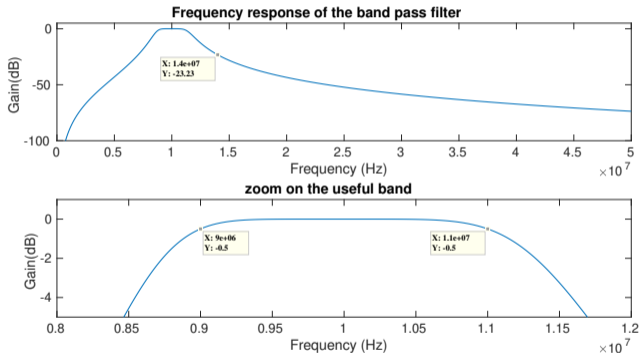
$$\sqrt{\left(\frac{10^{\frac{A_{min}}{10}} - 1}{\Omega_S^{2n}}\right)} \leq \epsilon \leq \sqrt{10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1}$$

- On applique la transformation suivante $S = S_N \cdot \epsilon^{\frac{1}{n}}$
- On applique la transformation passe bas \rightarrow passe bande

Fonction de transfert filtre passe bande

$A_{max}=0.5$ dB $A_{min}=20$ dB

$f_2=9$ MHz $f_3=11$ MHz $f_4=14$ MHz $f_1=7.07$ MHz

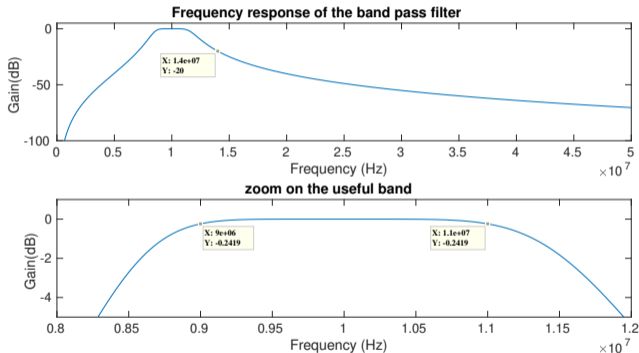


$$\epsilon = \sqrt{10 \frac{A_{max}}{10} - 1} = 0.3493$$

Fonction de transfert filtre passe bande

$A_{max}=0.5$ dB $A_{min}=20$ dB

$f_2=9$ MHz $f_3=11$ MHz $f_4=14$ MHz $f_1=7.07$ MHz



$$\epsilon = \sqrt{\left(\frac{10 \frac{A_{min}}{10} - 1}{\Omega_s^{2n}} \right)} = 0.2393$$



Outline

Introduction, applications

Spécifications des filtres

Approximations standards

Types de filtres

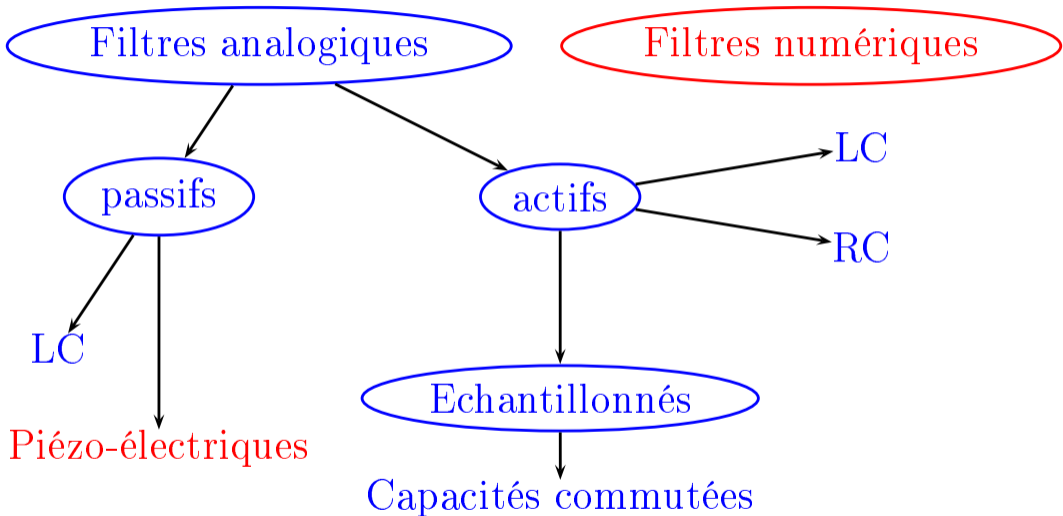


Types de filtres

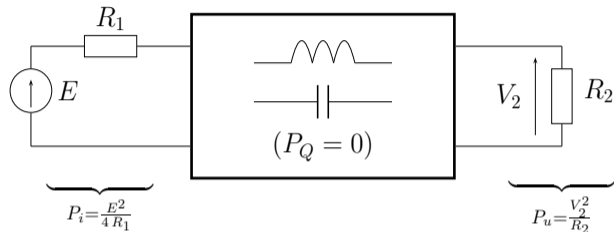
Le choix d'une technologie particulière pour réaliser un filtre est guidé par un certain nombre de critères :

- Performances peu sensibles aux variations des composants, de la température,...
- Distorsion réduite, faible bruit
- Faible surface, consommation, coût
- Sélectivité élevée
- Facilité de calibrage si celui-ci est nécessaire
- ...

Classification des technologies usuelles



Filtres LC

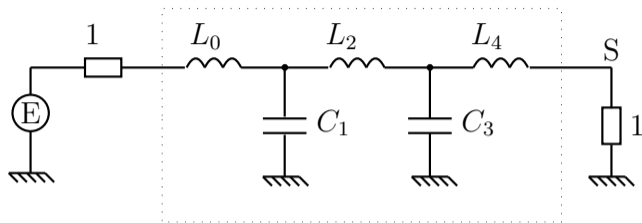


$$P_r = P_i - P_u \quad , \quad |t|^2 = \frac{P_u}{P_i} \leq 1 \quad , \quad |r|^2 = \frac{P_r}{P_i} \quad , \quad |K|^2 = \frac{P_r}{P_u}$$

$$|t|^2 = \frac{4 R_1}{R_2} \left| \frac{V_2}{E} \right|^2 = \frac{P_u}{P_u + P_r} = \frac{1}{1 + |K|^2}$$

On notera la similitude entre la fonction K et la fonction caractéristique.
Le quadripôle LC est idéalement sans pertes et sans bruit.

Exemple de filtre LC



Prototype passe-bas LC du 5^{ème} ordre

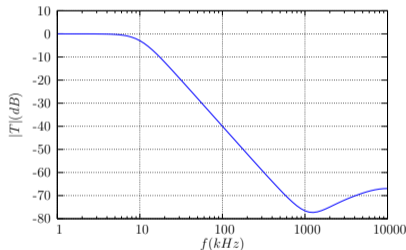
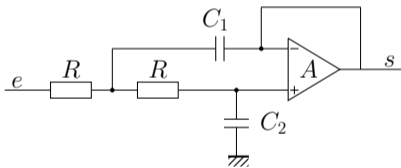
k impair	k pair
$C_k = 2 \sin \left[\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right]$	$L_k = 2 \sin \left[\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right]$

Valeur des éléments L et C (Butterworth, $A_{max} = 3$ dB)

Filtres actifs RC

Cellule passe-bas du second ordre de Sallen-Key :

$$T(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + \frac{\omega_0}{Q_0} p + \omega_0^2} \quad , \quad \omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}} \quad , \quad Q_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$$

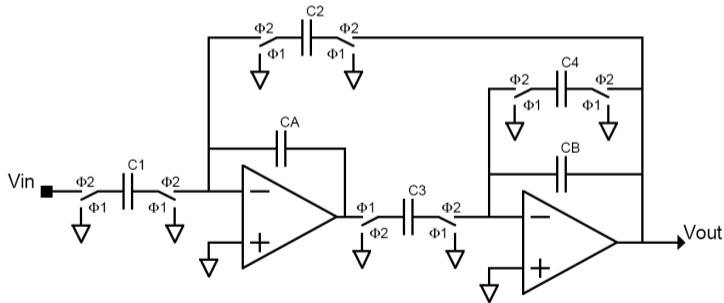


Les performances du filtre sont limitées par celles de l'amplificateur. Pour un filtre de butterworth ayant une fréquence de coupure de 10 kHz, on constate une très forte dégradation à partir de 1 MHz (Amplificateur LT1007 - <http://www.linear.com>).

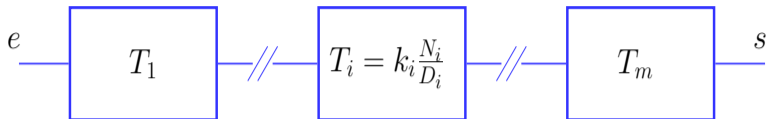
Filtres à capacités commutées

Cellule de filtrage passe-bas du second ordre :

$$T(z) = -\frac{C_1 C_3}{C_A C_B} \cdot \frac{z}{\left(\frac{C_4}{C_B} + 1\right) z^2 + \left(\frac{C_2 C_3}{C_A C_B} - \frac{C_4}{C_B} - 2\right) z + 1}$$



Structure cascade



Ces caractéristiques sont les suivantes :

1. Chaque cellule réalise un filtrage du premier ou du second ordre
2. L'interaction entre les cellules est supposée négligeable
3. La réalisation du filtre complet fait intervenir $m - 1$ fonctions intermédiaires, ce qui nécessite les choix suivants :
 - ordonnancement des dénominateurs D_i
 - ordonnancement des numérateurs N_i
 - répartition des gains k_i