TELECOM Paris

Institut Mines-Télécom

Électronique des Systèmes d'acquisition ELEC101

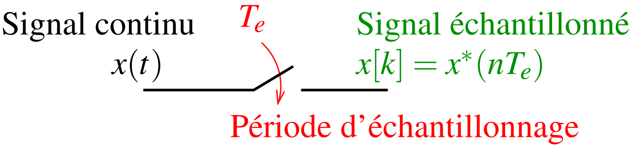
Chadi Jabbour

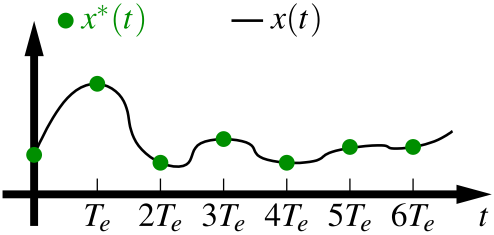
Échantillonnage et TZ

Signaux analogiques continus et discrets

Deux grandes classes de signaux analogiques sont distinguées :

- Signaux à temps continu, noté t, fonction $x(t)$;
- Signaux à temps discret, noté k, séquence $x[k]$.





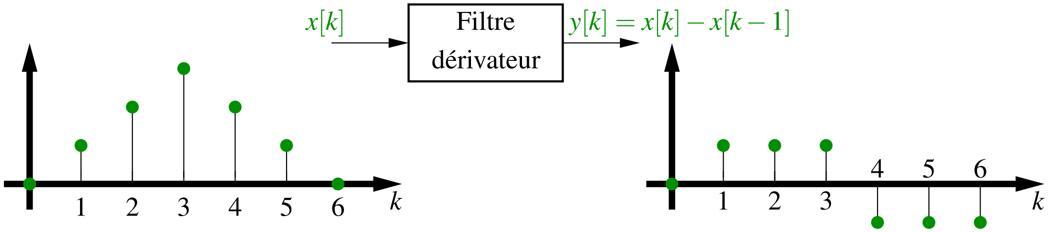
Systèmes Discrets

- Caractérisé par une relation entrée sortie $y[n] = f(x[n])$
- Les valeurs en entrée et en sortie ne sont connues qu'à des instants discrets
- L'intervalle de temps qui sépare deux de ces instants est la période d'échantillonnage notée T_e ou T_s en anglais

Théorème de Nyquist-Shannon

L'échantillonnage *sans perte* d'un signal exige une fréquence d'échantillonnage supérieure au double de la bande passante de ce signal.

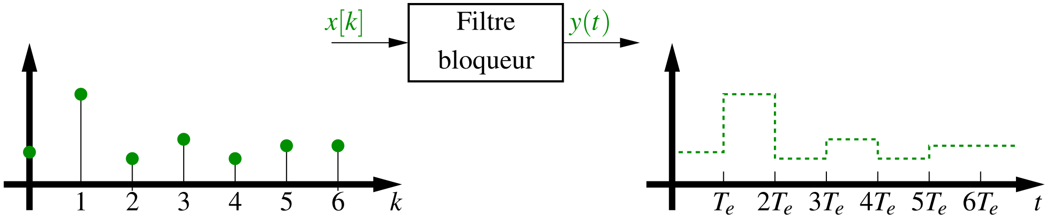
Systèmes analogiques: x et y échantillonnés



Ce filtre réalise la différence entre 2 échantillons consécutifs d'où son nom de dérivateur.
Le comportement de ce type de système peut être modélisé par une 'équation aux différences finies' d'ordre n à coefficient α_i et β_i réels et constants.

$$y[k] = -\sum_{i=1}^{n} \beta_i y\left[k-i\right] + \sum_{j=0}^{m} \alpha_j x\left[k-j\right]$$ m et n sont finis.

Systèmes analogiques: x échantillonné et y continu



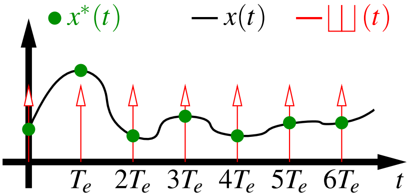
Interpolation d'ordre 0 ou blocage

La valeur de l'entrée est bloquée sur une période d'échantillonnage

L'Échantillonnage: le Peigne de Dirac

Échantillonnage

L'échantillonnage peut être modélisé par une multiplication (temporelle) du signal analogique avec un peigne de Dirac



$$x^*(nT_e) = x(t) \cdot Ш_{T_e}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

$$x^*(nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

Exemple fonction sinusoïdale

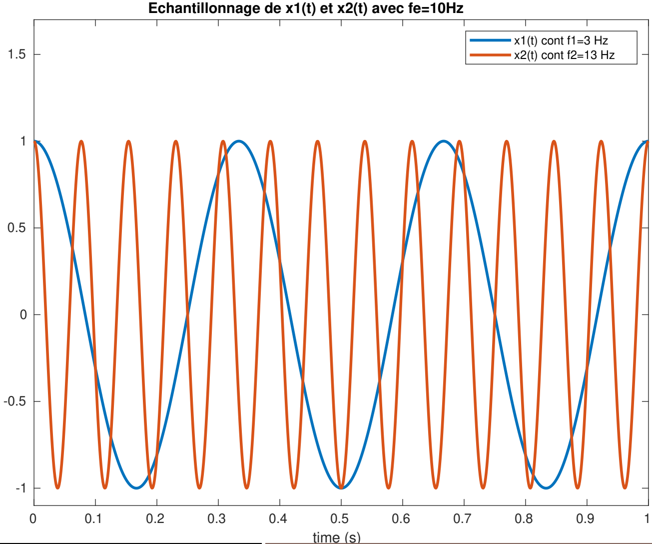
Soit $x_1(t) = \cos(2\pi f_1 t)$ et $x_2(t) = \cos(2\pi f_2 t)$ 2 signaux qu'on échantillonnera à une fréquence $f_e = \frac{1}{T_e}$. On prendra $f_2 = f_e + f_1$

$$x_1^*(t) = \cos(2\pi f_1 t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_1 nT_e)\delta(t - nT_e)$$

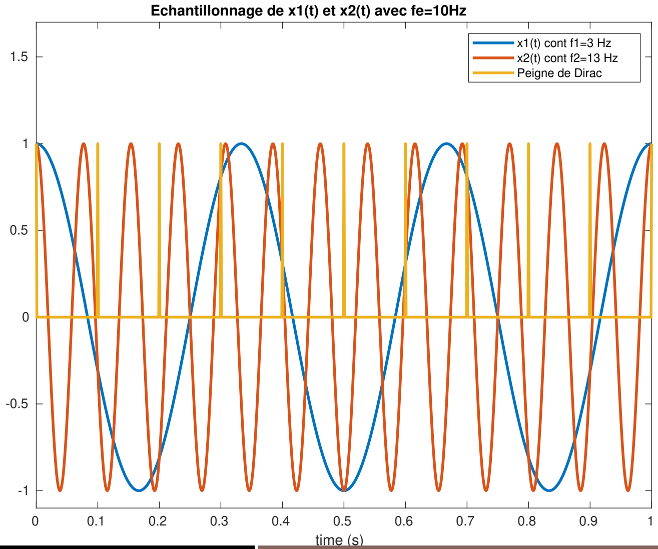
$$x_2^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_2 nT_e)\delta(t - nT_e)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(\underbrace{2\pi f_e nT_e}_{2\pi n} + 2\pi f_1 nT_e)\delta(t - nT_e) = x_1^*(t)$$

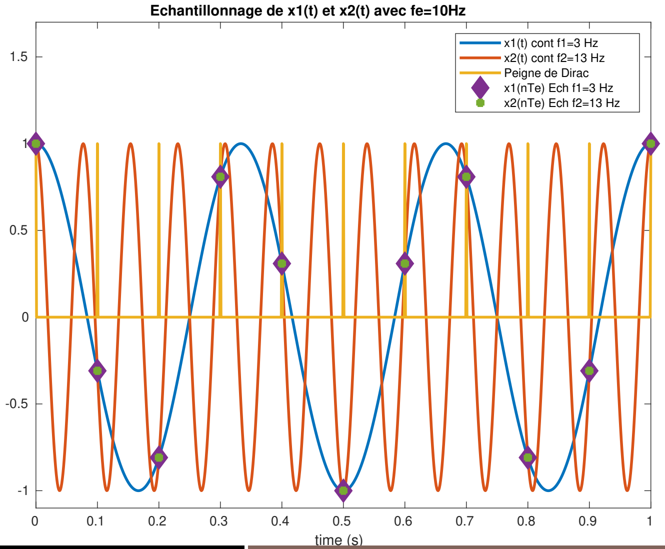
Exemple Repliement du signal



Exemple Repliement du signal



Exemple Repliement du signal



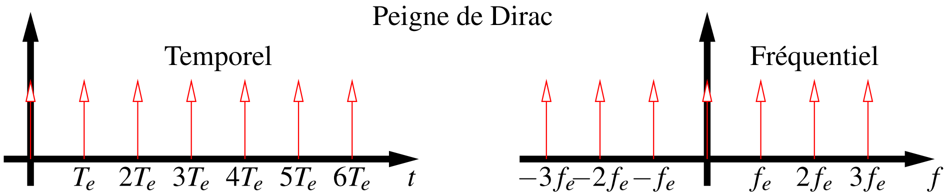
Impact fréquentiel de l'échantillonnage

On peut démontrer en utilisant les séries de Fourier que

$$Ш_{T_e}(t) = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn2\pi f_e t}$$

La transformée de Fourier de $Ш_{T_e}(t)$ est donc donnée par

$$TF\{Ш_{T_e}(t)\} = Ш(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} Ш_{T_e}(t) e^{-j2\pi f t} dt = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nfe)$$



Impact fréquentiel de l'échantillonnage

L'échantillonnage est modélisé par une multiplication par un peigne de Dirac dans le domaine temporel donc c'est une convolution dans le domaine fréquentiel

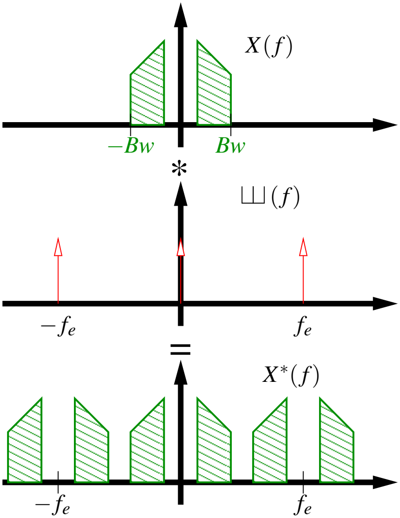
$$X^*(f) = X(f) * ш(f) = X(f) * f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nfe)$$

$$X^*(f) = f_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(k)\delta(f - nfe - k) = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_e)$$

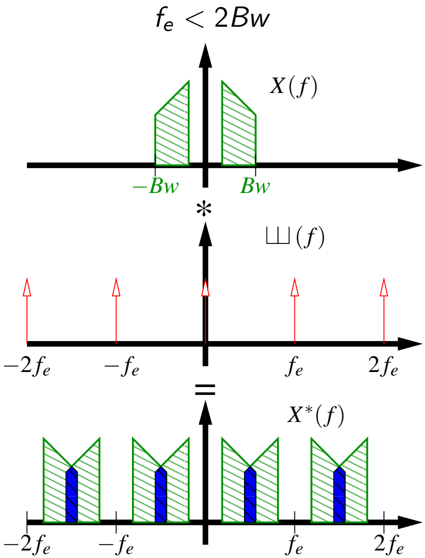
Le spectre de $X^*(f)$ est infini et est périodisé avec une période f_e

Échantillonnage

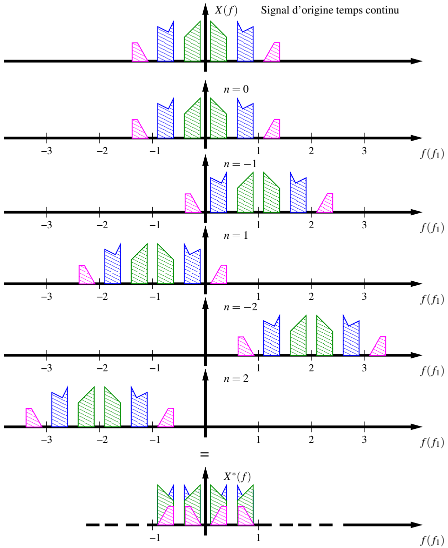
$f_e > 2Bw$



Échantillonnage



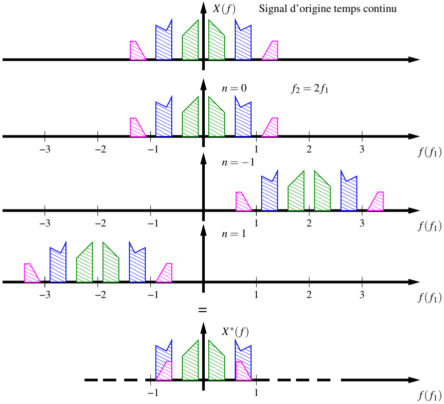
Comparaison 2 valeurs de f_e



$$X^*(f) = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_e)$$

Premier cas: échantillonnage à $f_e = f_1$

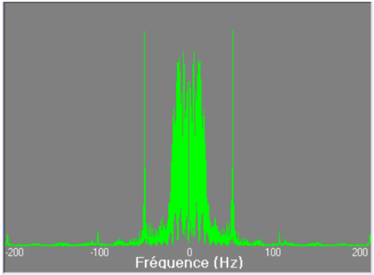
Comparaison 2 valeurs de f_e

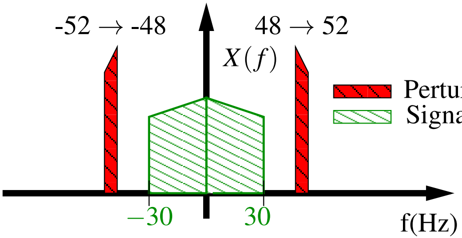


$$X^*(f) = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_e)$$

Deuxième cas: échantillonnage à $f_e = 2 \times f_1$

Exercice 1: Signal ECG





1. Sachant que la phase du signal ECG est une fonction impaire et que son module, comme illustré, est une fonction paire, quelle conclusion peut-on tirer sur le signal ECG?
2. Tracer le spectre du signal pour une fréquence d'échantillonnage f_e de 70 Hz.
3. Que faut-il faire pour éviter d'avoir le problème du repliement?

Exercice 1: solution

Question 1:Notons $X(j\omega)$ la transformée de Fourier du signal ECG qu'on notera $x(t)$.

$$X(j\omega) = T(\omega)e^{j\phi(\omega)},$$

ou $T(\omega)$ et $\phi(\omega)$ sont respectivement la module et la phase de $X(j\omega)$. En utilisant la transformée de Fourier inverse, déterminons l'expression de $x(t)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} T(\omega)e^{j\phi(\omega)}e^{j\omega t}d\omega$$

En séparant l'intégrale sur $\omega < 0$ et $\omega > 0$ et en utilisant le fait que $T(-\omega) = T(\omega)$ et que $\phi(-\omega) = -\phi(\omega)$, on peut exprimer $x(t)$ après quelques manipulations basiques par:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{0}^{+\infty} T(\omega)e^{-j\phi(\omega)}e^{-j\omega t}d\omega + \int_{0}^{+\infty} T(\omega)e^{j\phi(\omega)}e^{j\omega t}d\omega\right)$$

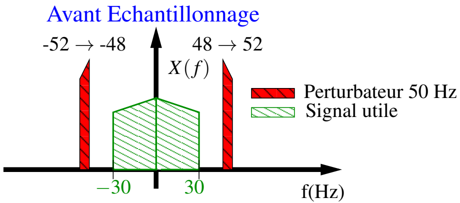
Exercice 1: solution

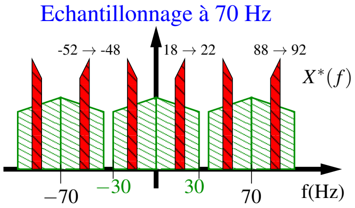
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} T(\omega)(e^{-j(\phi(\omega)+\omega t)} + e^{j(\phi(\omega)+\omega t)})d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} T(\omega)(2\cos(\phi(\omega) + \omega t))d\omega$$

On peut ainsi conclure que le signal $x(t)$ est un signal réel. Il est aussi facile de démontrer la réciproque (le spectre d'un signal réel a un module paire et une phase impaire)

Exercice 1: solution





Question 3: Il faut soit filtrer dans le domaine analogique avant de faire l'échantillonnage soit échantillonner à une fréquence supérieure à 82 Hz suivi d'un filtrage numérique

Transformée en $\mathcal{Z}$

Transformée en $\mathcal{Z}$

$$T\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(\mathcal{Z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\mathcal{Z}^{-n}$$

- La transformée en $\mathcal{Z}$ est l'équivalent dans le domaine discret de la transformée de Laplace dans le domaine continu.
- La TZ est l'outil mathématique adapté pour concevoir et analyser les fonctions discrètes (analogiques et numériques).

Propriétés de la TZ

- La TZ est linéaire

$$TZ\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aTZ\{x_1[n]\} + bTZ\{x_2[n]\}$$

- La TZ d'un signal retardé

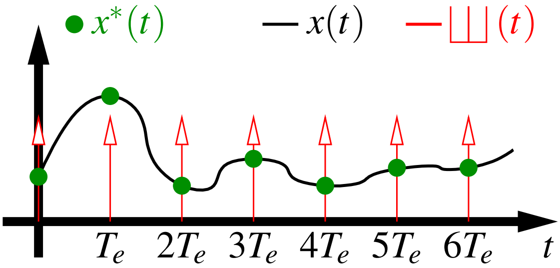
$$TZ\{x[n-k]\} = \mathcal{Z}^{-k}X(\mathcal{Z})$$

- La TZ de la sortie d'un filtre discret $h[n]$

$$Y(\mathcal{Z}) = TZ\{x[n] * h[n]\} = X(\mathcal{Z}) \cdot H(\mathcal{Z})$$

TELECOM Paris

Exercice 2: Échantillonnage et TZ



1. Écrire l'expression du signal $x^*(t)$ en fonction de la valeur des échantillons de $x(t)$ et du peigne de Dirac.

2. Trouver la transformation de Laplace, puis la transformation en $\mathcal{Z}$ de $x^*(t)$.

3. En déduire la relation entre $\mathcal{Z}$ et p et les conditions de stabilité du système en temps discret.

Exercice 2: solution

Question 1:

$$x^*(nT_e) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

Question 2:

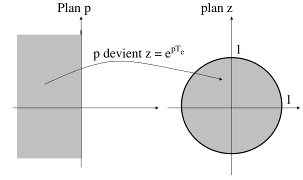
$$L[x^*(t)] = X^*(p) = \int_0^{+\infty} x^*(t)e^{-pt}dt$$

On sait que $L[\delta(t-a)] = e^{-pa}$, on peut montrer que

$$X^*(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT_e)e^{-npT_e}$$

$$TZ\{x(t)\} = X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT_e)e^{-npT_e}$$

Stabilité équivalence temps continu- discret



Un système de fonction de transfert H(p) est stable si les pôles sont à partie réelle négative

$$p = \sigma + j\omega \Longrightarrow \mathcal{Z} = e^{(\sigma + j\omega)Te} = e^{\sigma Te} \cdot e^{j\omega Te}$$

$$\sigma < 0 \Longrightarrow \mid e^{pTe} \mid < 1$$

Stabilité

Stabilité dans le domaine temporel

Un filtre $h(n)$ est stable au sens EBSB si et seulement si

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mid h(n) \mid < \infty$$

Stabilité dans le domaine des $\mathcal{Z}$

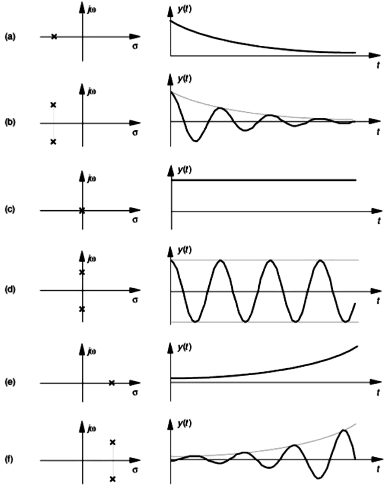
Un filtre $H(\mathcal{Z})$ est stable EBSB si et seulement tous ses pôles sont à l'intérieur du cercle unité

Stablilité au sens large

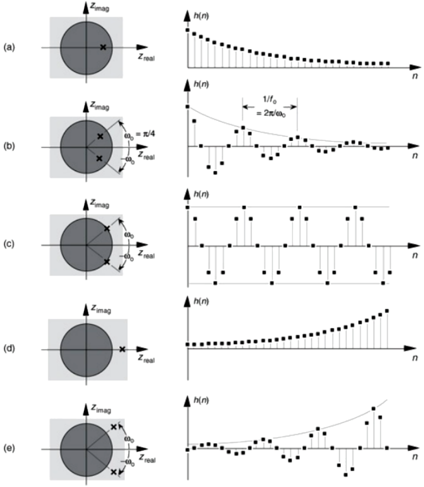
Si un système a des pôles d'ordre 1 sur le cercle unité, il est stable au sens large

Stabilité et pôles : illustrations

Temps continu – Laplace



Temps discret – TZ

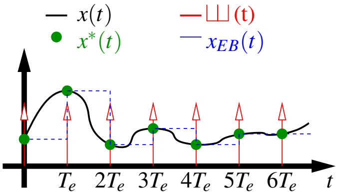


Systèmes continus à systèmes discrets

Temps continu	Temps Discret
$h(t)$ réponse impulsionnelle	$h[n]$ réponse impulsionnelle discrète
Réponse temporelle $y(t) = x(t) * h(t)$	Réponse temporelle $y[n] = x[n] * h[n]$
Fonction de transfert en p $H(p)$	Fonction de transfert en $\mathcal{Z}$ $H(\mathcal{Z})_{\mathcal{Z}=e^{p \cdot Te}}$
Domaine complexe $Y(p) = X(p) \cdot H(p)$	Domaine complexe $Y(\mathcal{Z}) = X(\mathcal{Z}) \cdot H(\mathcal{Z})$
Transformée de Fourier $H(p)_{p=j\omega}$	TFTD $H(\mathcal{Z})_{\mathcal{Z}=e^{j\omega \cdot Te}}$

TELECOM Paris

Exercice 3: Échantillonnage et blocage



1. Exprimer $x_{EB}(t)$ en fonction des échantillons $x(nT_e)$ et de la fonction échelon $u(t)$
2. Calculer la transformation de Laplace de $x_{EB}(t)$: $X_{EB}(p)$. Faire apparaître dans cette expression la transformation de Laplace de $x^*(t)$: $X^*(p)$. En déduire la fonction de transfert d'un bloqueur, notée $T_B(p)$.
3. Représenter le module de $T_B(j\omega)$ en fonction de la fréquence.

Solution exercice 3

Question 1: L'opération de blocage correspond à une convolution entre le signal échantillonné $x(nT_e)$ et une porte $p(t)$ égale à 1 sur l'intervalle $[0\ ;\ \ T_e]$ et nul en dehors :

$$p(t) = u(t) - u(t - T_e)$$

On peut alors mettre $x_{EB}(t)$ sous la forme suivante :

$$x_{EB}(t) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e)\right) * p(t)$$

Question 2:

$$x_{EB}(t) = x^*(t) * p(t) \Longrightarrow X_{EB}\,(p) = X^*(p) \cdot T_B(p)$$

$$T_B(p) = L[u(t)] - L[u(t - T_e)] = \frac{1}{p} - \frac{e^{-pT_e}}{p} = \frac{1 - e^{-pT_e}}{p}$$

Solution exercice 3

Question 3: on remplace p par $j\omega$

$$T_B(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T_e}}{j\omega} = \frac{1 - e^{-j2\pi f T_e}}{j2\pi f} = e^{-j\pi f T_e}\frac{e^{+j\pi f T_e} - e^{-j\pi f T_e}}{j2\pi f}$$

$$T_B(j\omega) = e^{-j\pi f T_e}\frac{\sin(\pi f T_e)}{\pi f}$$

$$\mid T_B(j\omega) \mid = \mid \frac{\sin(\pi f T_e)}{\pi f} \mid = \mid T_e \,\mathrm{sinc}(\pi f T_e) \mid$$