



Contrôle - ELEC101 -1^{ère} année 2023-2024

Date : 21/06/2024

Heure : 13h30

Durée 1h30 - Documents et Calculatrice autorisés

Exercice 1 - Amplification

On considère le circuit de la figure 1 gauche).

Question 1.1 On suppose dans un premier temps l'AOP parfaitement idéal (gain différentiel et impédances d'entrée infinies ; impédance de sortie nulle). Exprimer la fonction de transfert de ce circuit.

Réponse 1.1 $V_s = -\frac{R_2}{R_1} V_e$

Question 1.2 Quelle est la fonction réalisée ?

Réponse 1.2 Amplificateur inverseur

On suppose maintenant que le gain différentiel de l'AOP (tel que $v_s = A(v^+ - v^-) = A\epsilon$) est fini et donné par :

$$A(p) = \frac{A_0}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \quad \text{avec } \tau_1 \gg \tau_2$$

Question 1.3 Montrer que le fonctionnement du circuit peut être représenté par le schéma fonctionnel de la figure 1 droite). Déterminer K et exprimer la fonction de transfert $H = \frac{v_s}{v_e}$ en fonction de A et de K .

Réponse 1.3 L'analyse du circuit donne $H = \frac{v_s}{v_e} = -\frac{AR_2}{AR_1 + (R_1 + R_2)}$. L'analyse du bloc diagramme donne $H = \frac{A}{1 + AK}(K - 1)$

On trouve donc $K = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$

Question 1.4 Le circuit est-il stable ? (Nous nous mettrons dans le cas $(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\tau_1\tau_2(1 + A_0K) < 0$)

Réponse 1.4 Pour étudier la stabilité du système, on calcule les poles de la fonction de transfert et on étudie le signe de leur partie réelle. Pour rappel, il faut qu'elle soit strictement négative pour tous les poles afin que le système soit stable. On peut démontrer facilement que le calcul des poles revient à calculer les racines de l'expression suivante :

$$\tau_1\tau_2 p^2 + (\tau_1 + \tau_2)p + (1 + A_0K) = 0$$

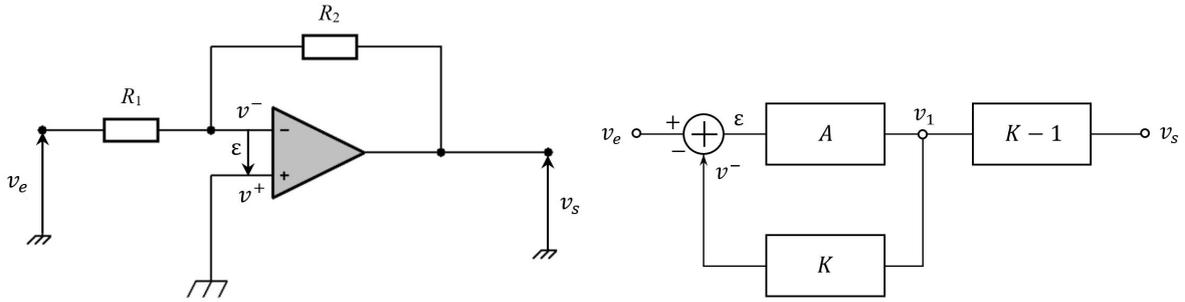


FIGURE 1 – Gauche) Implémentation circuit . Droite) Diagramme bloc.

Avec la condition donnée dans l'énoncé, on a un déterminant Δ négatif et donc les poles sont donnés par l'expression suivante :

$$p_{1,2} = \frac{-(\tau_1 + \tau_2) + j\sqrt{-\Delta}}{2\tau_1\tau_2}$$

On en déduit que le système est toujours stable.

Pour aller plus loin, voici la démonstration pour le cas général (sans la condition de signe sur le déterminant) :

La fonction de transfert est du 2^e ordre, donc stable (car les coefficients sont de même signe, donc le dénominateur est un polynôme de Hurwitz). On peut calculer les pôles (mais c'est théoriquement inutile). La FT est donnée par : $H = \frac{A_0(K-1)}{(1+KA_0)+(\tau_1+\tau_2)p+\tau_1\tau_2p^2}$. Ses pôles sont donc donnés par : $p_{1,2} = \frac{-(\tau_1+\tau_2)\pm\sqrt{\Delta}}{2\tau_1\tau_2}$ avec $\Delta = (\tau_1 + \tau_2)^2 - 4(1 + KA_0)\tau_1\tau_2$. Si $\Delta \leq 0$, c'est-à-dire si $KA_0 \geq \frac{(\tau_1+\tau_2)^2}{4\tau_1\tau_2} - 1$, le circuit est stable car $\Re(p_{1,2}) \leq 0$. Si $\Delta > 0$, $\sqrt{\Delta} < \tau_1 + \tau_2$, donc les pôles (réels) sont toujours négatifs.

Question 1.5 Que se passe-t-il lorsque les paramètres du circuit ($R_{1,2}$, A_0 et $\tau_{1,2}$) sont choisis tels que, pour une pulsation ω_T , $AK(j\omega_T) \rightarrow -1$ par valeurs supérieures ?

Réponse 1.5 Le système est proche de l'instabilité, ce qui se traduit par des effets transitoires plus importants

On pose : $AK(j\omega_T) = -1 + \delta$. On suppose que les paramètres du circuit sont choisis tels que δ est «petit» (un seuil pratique devrait être choisi, mais il dépend des caractéristiques des composants et de l'architecture du circuit ; il n'est pas nécessaire de considérer cet aspect ici).

Question 1.6 Quel risque un tel choix pose-t-il pour le circuit si l'on considère les incertitudes de fabrication (tolérances des composants, réalisation du circuit) et les «effets parasites» non modélisés (bruit, non idéalité des composants, connexions, etc.) ?

Réponse 1.6 Si l'on prend en compte ces effets, des pôles supplémentaires (haute fréquence) peuvent apparaître dans la FT. Dans ce cas, δ peut s'annuler (voire devenir négatif), ce qui correspond à un système instable.

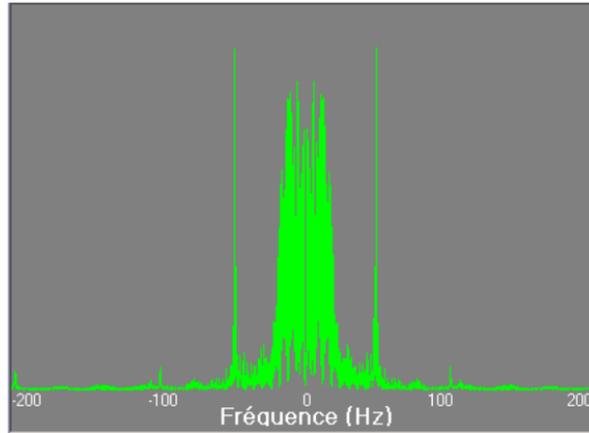


FIGURE 2 – Spectre du signal cardiaque.

Exercice 2 - Filtrage

L'appareillage permettant de faire la mesure du signal cardiaque étant branché sur le réseau électrique, voit apparaître dans son spectre des composantes autour de la fréquence du réseau à 50 Hz. Une illustration du spectre du signal est donnée en Figure 2. Afin de traiter correctement ce signal, on souhaite faire un filtre coupe-bande pour supprimer la bande de fréquence $[49,5-50,5]$ Hz. Cette bande doit être atténuée d'au moins 10 dB. Afin de ne pas altérer le signal cardiaque, les fréquences inférieures à 48 Hz ne doivent pas être atténuées de plus de 3 dB.

Question 2.1 Tracer le gabarit du filtre à symétrie géométrique à réaliser.

Réponse 2.1 $f_1 = 48$ Hz ; $f_2 = 49.5$ Hz ; $f_3 = 50.5$ Hz ; $A_{min}=10$ dB ; $A_{max}=3$ dB sont donnés dans l'énoncé.

f_4 est calculé en utilisant la symétrie géométrique $f_4 = \frac{f_2 f_3}{f_1} = 52.1$ Hz

Question 2.2 En déduire le gabarit du filtre passe-bas normalisé ainsi que la valeur de Ω_S .

Réponse 2.2 $\Omega_S = \frac{f_4 - f_1}{f_3 - f_2} = 4.1$ $A_{min} = 10$ dB ; $A_{max} = 3$ dB

Pour réaliser le filtre, nous utiliserons une approximation de Butterworth ($\Psi_n(\Omega) = \Omega^n$).

Question 2.3 Déterminer l'ordre du filtre passe-bas normalisé.

Réponse 2.3 $D = \sqrt{\frac{10^{A_{min}/10} - 1}{10^{A_{max}/10} - 1}} = 3$; $n = 0.8$ Donc on prend un ordre 1. Le filtre coupe-bande équivalent aura un ordre double donc un ordre 2.

La fonction de transfert du filtre coupe-bande équivalent est donnée par :

$$H(p) = \frac{\frac{p^2}{\omega_0^2} + 1}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + 3B \frac{p}{\omega_0} + 1}$$

Question 2.4 Exprimer la fonction de transfert dans le domaine de Fourier. Tracer à main levée le module de $H(j\omega)$ en dB.

Réponse 2.4

$$H(j\omega) = \frac{\frac{-\omega^2}{\omega_0^2} + 1}{\frac{-\omega^2}{\omega_0^2} + 3B\frac{j\omega}{\omega_0^2} + 1}$$

$$|H(\omega)| = \frac{\left| \frac{-\omega^2}{\omega_0^2} + 1 \right|}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(3B\frac{j\omega}{\omega_0^2}\right)^2}}$$

Pour $\omega = \omega_0$, le module est nul. Pour $\omega \rightarrow 0$, le module est égal à 1 meme chose pour $\omega \rightarrow \infty$

Question 2.5 Quel est le module de $H(j\omega)$ à la pulsation ω_0 ? Conclure sur son efficacité pour atténuer les perturbations du secteur.

Réponse 2.5 Le module est nul à ω_0 , c'est un filtre notch. Il aura une atténuation très importante autour de la fréquence 50 Hz permettant ainsi une très bonne réjection.

Exercice 3 - CAN à capacités commutées

Le montage présenté sur la figure 3 suppose que les capacités et les commutateurs sont parfaits et l'amplificateur opérationnel idéal. Nous supposons que les tensions d'entrée sont

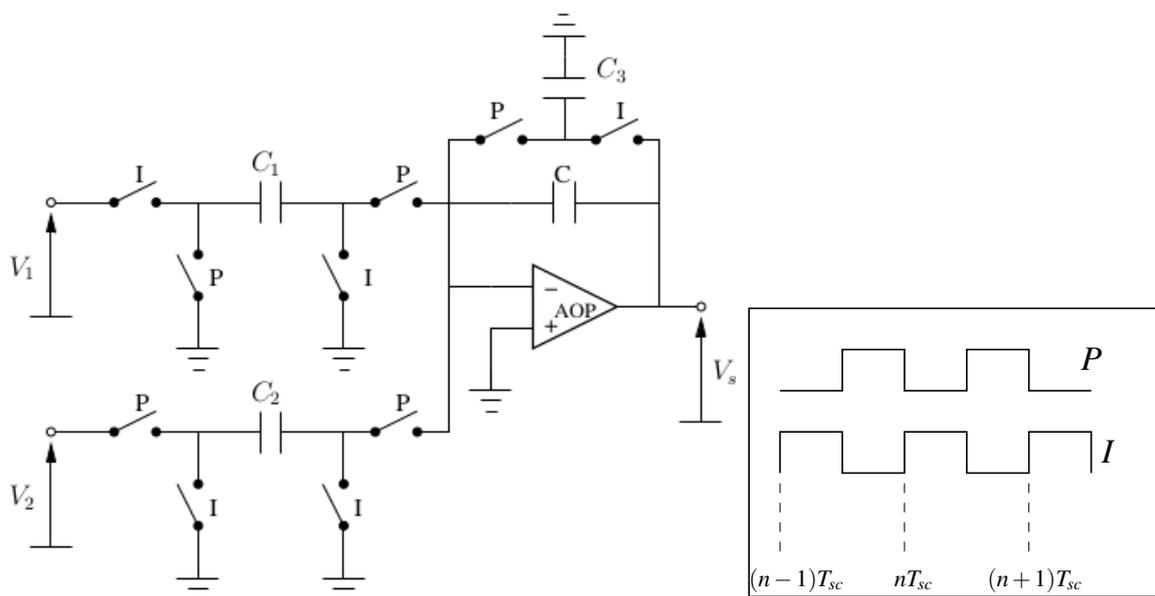


FIGURE 3 – Circuit à capacités commutées

échantillonnées et bloquées pendant la phase paire notée P. Ceci se traduit par $V_i((n-0.5)T_{sc}) = V_i((n-1)T_{sc})$.

Question 3.1 En supposant que $C_3 = C$ et que $C_1 = 2C_2 = 2C$, démontrer que la relation entre la tension de sortie V_s et les tensions d'entrée V_1 et V_2 est donnée par :

$$V_s(nT_{sc}) = 2V_1((n-1)T_{sc}) - V_2(nT_{sc})$$

Réponse 3.1 Calculons les charges aux instants I (nous prenons les armatures positive à l'opposé de la masse virtuelle de l'AOP (à gauche pour C_1 et C_2 , à droite pour C et en haut pour C_3) :

$$Q_1((n-0.5)T_{sc}) = C_1V_1((n-0.5)T_{sc}) = C_1V_1((n-1)T_{sc}) \text{ D'après l'énoncé}$$

$$Q_2((n-0.5)T_{sc}) = 0$$

$$Q_3((n-0.5)T_{sc}) = -C_3V_s((n-0.5)T_{sc})$$

$$Q((n-0.5)T_{sc}) = CV_s((n-0.5)T_{sc})$$

Calculons les charges aux instants P

$$Q_1(nT_{sc}) = 0$$

$$Q_2(nT_{sc}) = C_2V_2(nT_{sc})$$

$$Q_3(nT_{sc}) = 0$$

$$Q(nT_{sc}) = CV_s(nT_{sc})$$

En phase I, seule la capacité C connectée à l'entrée '-' de l'AOP est isolée. Nous en déduisons que : $V_s((n-0.5)T_{sc}) = V_s((n-1)T_{sc})$ En phase P, toutes les armatures des capacités connectées à l'entrée '-' de l'AOP sont isolées, c'est-à-dire les armatures négatives de C_1 , C_2 , C_3 et C , d'où :

$$V_s(nT_{sc}) = 2V_1((n-1)T_{sc}) - V_2(nT_{sc})$$

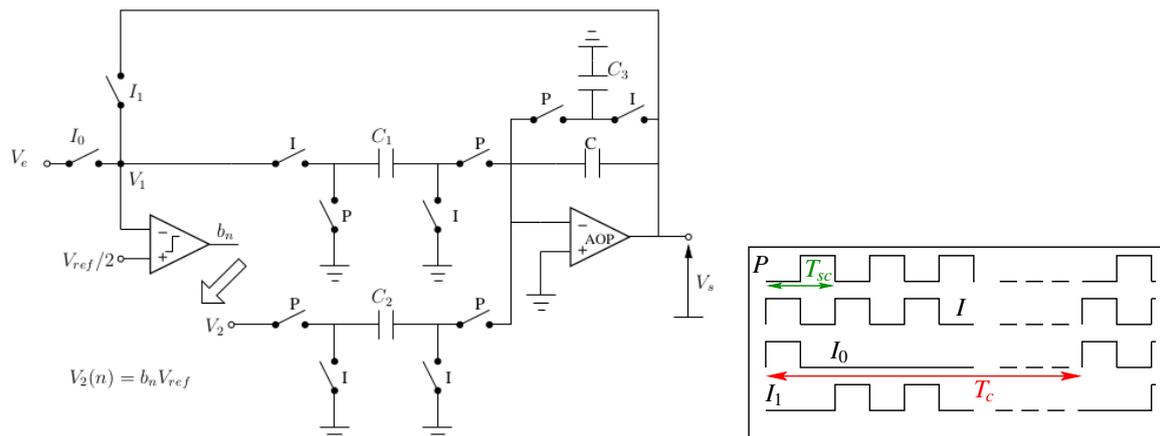


FIGURE 4 – CAN à capacités commutées

Le circuit de la figure 3 est en effet le bloc de base d'un convertisseur analogique numérique (CAN) représenté dans la figure 4. Comme vous pouvez le constater, le système contient à

présent une boucle de retour entre la sortie V_s et l'entrée V_1 et un comparateur dont la sortie modifiera l'entrée V_2 comme suit :

$$V_2[n] = b_n V_{ref}$$

avec

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{si } V_1[n-1] \geq V_{ref}/2 \\ 0, & \text{si } V_1[n-1] < V_{ref}/2 \end{cases}$$

avec V_{ref} une tension constante positive de référence. Nous noterons $V_i[n]$ la valeur de la tension V_i à la fin du n^{eme} sous cycle T_{sc} . La décision sur V_2 est prise aux instants impairs et conservée à l'instant pair suivant.

En plus des 2 horloges P et I dont la période est donnée par T_{sc} , une horloge d'initialisation I_0 est rajoutée pour échantillonner la valeur V_e au début de chaque cycle de conversion T_c ainsi que l'horloge I_1 identique à la phase I sauf pendant la premier sous cycle. Nous supposons en plus que :

- $V_s[0] = 0$ initialisation réalisée lors du premier sous cycle
- V_e est une tension telle que $0 < V_e < V_{ref}$.
- Vu que l'interrupteur d'entrée I_0 n'est fermé qu'à la première phase I : $V_1[0] = V_e$
- L'interrupteur de retour I_1 est un interrupteur fermé en phase I sauf pendant la première période où il est ouvert.

Question 3.2 Montrer que $V_e = b_1 \frac{V_{ref}}{2} + \frac{V_s[1]}{2}$ avec

$$b_1 = \begin{cases} 1, & \text{si } V_e \geq V_{ref}/2 \\ 0, & \text{si } V_e < V_{ref}/2 \end{cases}$$

Réponse 3.2 Nous avons : $V_s[1] = 2V_1[0] - V_2[1]$ et $V_2[1] = b_1 V_{ref}$ et $V_1[0] = V_e$, donc : $V_e = b_1 V_{ref}/2 + V_s[1]/2$

Question 3.3 Montrer par récurrence que $0 < V_s[n] < V_{ref}$ pour $n > 0$.

Réponse 3.3 $V_s[0] = 0$. Si $V_1[1] \geq V_{ref}/2$ alors $b_1 = 1$ d'où $0 < V_s[1] = 2V_e - V_{ref} < V_{ref}$. Si $V_1[1] < V_{ref}/2$ alors $b_1 = 0$ d'où $0 < V_s[1] = 2V_e < V_{ref}$.

Supposons que : $0 < V_s[n-1] < V_{ref}$. Pour $n > 0$, nous avons : $V_s[n] = 2V_s[n-1] - V_2[n]$
Premier cas : $V_s[n-1] \geq V_{ref}/2$ d'où $V_2[n] = V_{ref}$ donc $0 < V_s[n] = 2V_s[n-1] - V_{ref} < V_{ref}$.
Second cas : $V_s[n-1] < V_{ref}/2$ d'où $V_2[n] = 0$ donc $0 < V_s[n] = 2V_s[n-1] < V_{ref}$.

Question 3.4 Montrer que $\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^i \frac{b_n}{2^n} V_{ref} \right) = V_e$.

Réponse 3.4 Nous avons : $V_s[n] = 2V_s[n-1] - b_n V_{ref}$ et $V_s[1] = 2V_e - b_1 V_{ref}$ Soit, plus généralement : $\frac{V_s[n]}{2^n} = V_e - V_{ref} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{2^i}$ comme $0 < V_s[n] < V_{ref}$, $0 < V_e - V_{ref} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{2^i} < \frac{V_{ref}}{2^n}$ d'où $\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^i \frac{b_n}{2^n} V_{ref} \right) = V_e$.

Question 3.5 Quel est le nombre de sous cycles nécessaire pour réaliser une conversion sur n bits ?

Réponse 3.5 b_1 est acquis à l'issue de la première période. Un bit supplémentaire est acquis à chaque période d'horloge. Il faut donc n périodes d'horloge pour convertir le signal sur n bits.

Nous voulons réaliser un convertisseur de SQNR (rapport signal sur bruit de quantification) d'au moins 60 dB pour convertir des signaux de bande passante comprise entre 0 et 20 kHz.

Question 3.6 Déterminer la durée maximale d'un sous cycle pour un signal sinusoïdal qui occuperait toute la dynamique du CAN.

Réponse 3.6 Afin de respecter le critère de Nyquist, il faut que : $f_e \geq 2 \times 20$ kHz. Sans suréchantillonnage, $f_e = 40$ kHz, soit : $T_e = 25 \mu s$. Par ailleurs, la résolution correspondant à un SNR de 60 dB est donnée par : $n \geq \frac{SNR-1,76}{6,02} = 9,67$. Soit, en pratique, $n = 10$ bits donc il nous faut 10 cycles T_{sc} donc il faut : $T_{sc} = \frac{T_e}{10} = 2,5 \mu s$.