

Exercice 1 - Amplification

La bande d'un canal de télécommunication destiné à véhiculer un signal audio est limité entre 300 Hz et 3 kHz. Ainsi, un circuit d'acquisition de ce signal doit amplifier cette bande de 20 dB et atténuer hors bande selon un 1^{er} ordre avec des fréquences de coupure (à -3 dB) à 300 Hz et 3 kHz. Pour concevoir ce circuit, on dispose d'un amplificateur opérationnel réel avec un gain fini de 66 dB. En utilisant un montage basé sur celui de l'inverseur illustré dans la figure 1, l'objectif est de concevoir le circuit d'acquisition nécessaire à cette application.

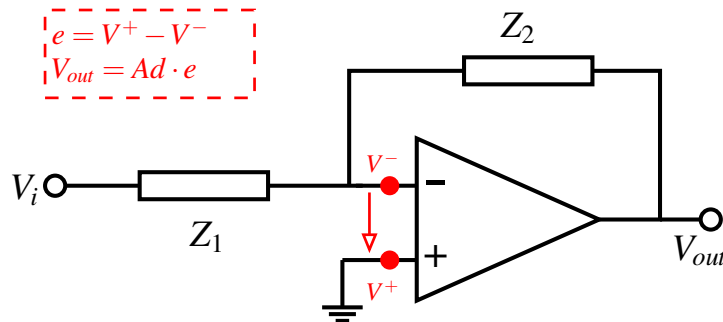


FIGURE 1 – Montage Inverseur ($i_+ = i_- = 0$)

Question 1.1 Déterminer la fonction de transfert (V_{out}/V_i) du montage inverseur illustré dans la Figure 1 dans le cas de l'amplificateur idéal ($A_d \rightarrow \infty$).

Réponse 1.1 $V_{out} = -\frac{Z_2}{Z_1} V_i$

Question 1.2 Quelle serait la fonction de transfert pour un amplificateur à un gain fini donné $V_{out} = A_d \cdot e$? Quelle est l'expression de l'écart entre les deux réponses (réel et idéal) dans le cas $Z_2 = 10 \cdot Z_1$? Calculer numériquement le pourcentage d'erreur obtenu avec l'amplificateur utilisé (A_d de 66 dB).

Réponse 1.2 $V_{out} = A \cdot e = A_d(V^+ - V^-) = -A_d V^-$

Le courant dans Z_1 est égal au courant dans Z_2 , ceci se traduit par :

$$\frac{V_i - V^-}{Z_1} = \frac{V^- - V_{out}}{Z_2} = 0$$

$$\frac{V_i}{Z_1} + \frac{V_{out}}{A_d Z_1} + \frac{V_{out}}{Z_2} + \frac{V_{out}}{A_d Z_2} = 0$$

$$\frac{V_{out}}{V_i} = -\frac{A_d}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}(A_d + 1)}$$

Donc l'expression de l'écart entre les 2 réponses est

$$-\frac{A_d}{1+\frac{Z_1}{Z_2}(A_d+1)} + \frac{Z_2}{Z_1} \approx 0.05$$

Question 1.3 Tracer le diagramme de Bode asymptotique en amplitude du circuit d'acquisition nécessaire à l'application audio.

Réponse 1.3 Passe bande du 1er ordre avec une bande passante de 300Hz à 3kHz et une amplification de 20 dB dans la bande

Afin de réaliser ce filtre, nous utiliserons le circuit de la figure 2.

Question 1.4 En vous appuyant sur le résultat de la première question, calculer les fonctions de transfert en Laplace $H_i(p)$ suivantes :

$$H_1 = \frac{V_x}{V_i}, H_2 = \frac{V_y}{V_x}, H_3 = \frac{V_{out}}{V_y} \text{ et } H_{tot} = \frac{V_{out}}{V_i}; \quad (1)$$

pour l'architecture en cascade de la figure 2 dans le cas de l'amplificateur opérationnel idéal.

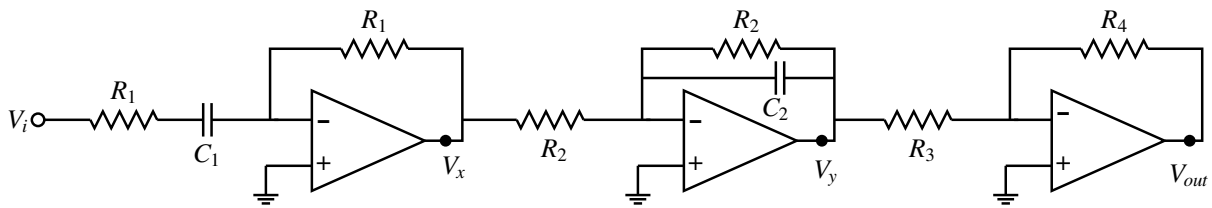


FIGURE 2 – Amplificateur et filtre analogique avec une architecture en cascade

Réponse 1.4 $H_1 = -\frac{pR_1C_1}{1+pR_1C_1}$

$$H_2 = -\frac{1}{1+pR_2C_2}$$

$$H_3 = -\frac{R_4}{R_3}$$

$$H_{tot} = H_1H_2H_3 = -\frac{R_4}{R_3} \frac{pR_1C_1}{(1+pR_1C_1)(1+pR_2C_2)}$$

Question 1.5 Calculer les valeurs de $\tau_1 = R_1C_1$, $\tau_2 = R_2C_2$ et $A_0 = \frac{R_4}{R_3}$ pour correspondre au diagramme de Bode nécessaire à l'application audio ciblée.

Réponse 1.5 $\tau_1 = R_1C_1 = \frac{1}{2\pi \cdot 300} = 530,5 \cdot 10^{-6}$

$$\tau_2 = R_2C_2 = \frac{1}{2\pi \cdot 3000} = 53,05 \cdot 10^{-6}$$

$$A_0 = \frac{R_4}{R_3} = 10^{20/20} = 10$$

Exercice 2 - Filtrage

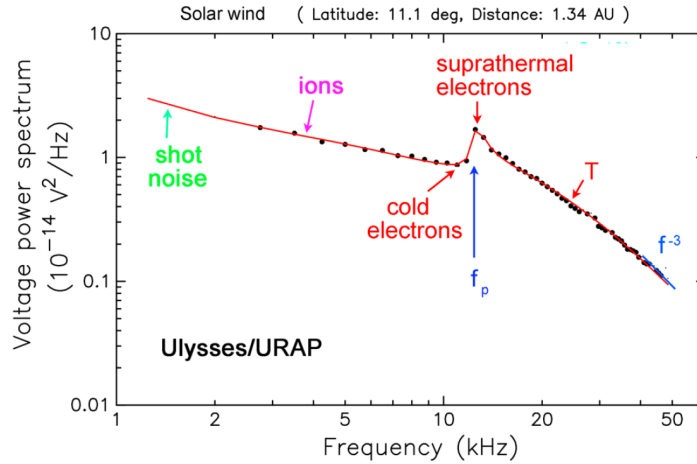


FIGURE 3 – Bruit quasi thermique du plasma au voisinage de Jupiter

Les ondes radioastronomiques (principalement celles causées par les aurores boréales) émises par la planète Jupiter occupent un spectre allant de 150 kHz à 45 MHz. Cependant, l'ionosphère terrestre bloque une partie de ces fréquences rendant leur observation impossible depuis la surface terrestre. Pour pouvoir détecter ces émissions de Jupiter, il faut intégrer un récepteur radio sur une sonde spatiale pour une observation *in-situ*. Afin d'interpréter les résultats obtenus, il faut connaître avec précision les propriétés du milieu où les mesures sont effectuées. Le milieu est un plasma faiblement dense complètement caractérisé par sa *fréquence plasma*. La figure 3 illustre la courbe caractéristique (appelée bruit quasi-thermique) au voisinage de Jupiter. Bien que la courbe soit fortement perturbée par le bruit en $1/f$ (shot noise) qu'on ne cherchera pas à filtrer, la fréquence plasma est facilement identifiable comme le pic de cette courbe. La fréquence plasma est inférieure à $f_1 = 30$ kHz. L'objectif est de réaliser un filtrage des ondes

Ordre	Numérateur	Dénominateur
1	1	$S_n + 1$
2	1	$S_n^2 + \sqrt{2}S_n + 1$
3	1	$(S_n + 1)(S_n^2 + S_n + 1)$

TABLE 1 – Table de Butterworth avec $A_{max} = 3dB$

radioastronomique pour éviter qu'elles ne perturbent la caractérisation du plasma où se trouve la sonde spatiale. On décide de limiter l'atténuation maximale dans la bande utile à 0.1 dB et atténuer les fréquences supérieures à 150 kHz d'au moins 10 dB. Pour la synthèse de ce filtre, on fait le choix de l'approximation de Butterworth. On rappelle que la fonction standard associée aux polynômes de Butterworth est : $\Psi_n(\Omega) = \Omega^n$.

Question 2.1 Quel est le type de filtre requis ? Quel est l'avantage dans la bande utile d'utiliser une approximation de Butterworth ?

Réponse 2.1 Passe-bas. Eviter de noyer le pic plasma à cause des ondulation dans la bande passante

Question 2.2 Tracer le gabarit du filtre nécessaire.

Réponse 2.2 $f_1 = 30$ kHz, $A_{max} = 0.1$ dB, $f_2 = 150$ kHz, $A_{min} = 10$ dB

Question 2.3 Déterminer Ω_s et le gabarit prototype passe-bas. En déduire l'ordre du filtre requis ainsi que la fonction de transfert du filtre prototype.

Réponse 2.3 $\Omega_s = 5$, $D = 19.65$, $n(= 1.85) = 2$, $H_{LPF_{3dB}} = \frac{1}{S_n^2 + \sqrt{2}S_n + 1}$

Question 2.4 Démontrer qu'en prenant $\epsilon = \frac{1}{8}$, on peut ajuster le filtre prototype obtenu au besoins du filtre requis. On rappelle que pour dénormaliser, on effectue la transformation $S = \frac{p}{\omega_1}$. En déduire que la fonction de transfert du filtre final s'écrit :

$$H_{LPF}(p) = \frac{\left(\frac{2\pi f_1}{\sqrt{\epsilon}}\right)^2}{p^2 + \sqrt{2}\left(\frac{2\pi f_1}{\sqrt{\epsilon}}\right)p + \left(\frac{2\pi f_1}{\sqrt{\epsilon}}\right)^2} \quad (2)$$

Réponse 2.4 $0.12 \leq \epsilon \leq 0.15$, $S_n = \frac{\sqrt{\epsilon}p}{2\pi f_1}$

Exercice 3 - Conversion

On souhaite implanter un convertisseur analogique-numérique en utilisant le circuit de la figure 4. V_{ref} est la pleine échelle ou la tension de référence du convertisseur. V_{in} est la tension à convertir qui varie entre 0 et V_{ref} . La sortie du comparateur à la sous-phase k notée $a[k]$ est donnée par :

$$a[k] = \begin{cases} 1 & \text{si } V_{e+} \geq V_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

À chaque interrupteur est associée une tension de contrôle I_j telle que :

- $I_j = 1 \Rightarrow$ l'interrupteur est fermé
- $I_j = 0 \Rightarrow$ l'interrupteur est ouvert

\bar{I}_j est le complément/inverse de I_j . Nous supposons que les capacités, les interrupteurs et le comparateur sont idéaux. Le circuit commence par une phase d'initialisation où toutes les capacités sont complètement déchargées et toutes les tensions sont mises à zéro ($V_1[0] = V_2[0] = V_3[0] = 0$). Puis viennent deux phases successives Φ_e et Φ_b . La phase Φ_b est constituée de trois sous-phases notées $\Phi_b[1]$, $\Phi_b[2]$ et $\Phi_b[3]$. Le tableau 2 gauche représente la commande des interrupteurs pour la phase Φ_e . Après cette phase de chargement de V_e , nous passons à la sous-phase $\Phi_b[1]$. Le tableau 2 droite représente la commande des interrupteurs pour cette sous-phase. À la fin de $\Phi_b[1]$, la sortie du comparateur est $a[1]$.

Question 3.1 En effectuant les bilans des charges et en se basant sur la conservation des charges (aux instants et aux endroits adéquats du circuit), montrer que les tensions à la fin de $\Phi_b[1]$ sont $V_1[1] = 2V_2[1] = 4V_3[1]$; il est obligatoire d'identifier clairement les espaces concernés par les conservations de charge. Il est recommandé de commencer par les condensateurs connectés à V_3 puis V_2 et enfin V_1 . Déterminer $V_1[1]$ en fonction de V_{ref} . En déduire $a[1]$ en fonction de V_{in} et de V_{ref} .

Réponse 3.1 En utilisant les notations en rouge de la figure (notations rajoutées pour la correction), à la sous-phase $\Phi_b[1]$, la quantité de charge dans l'armature positive de la capacité à l'entrée positive du comparateur est conservée.

$$Q_e[1] = Q_e^e \quad \Rightarrow \quad V_{e+}[1] = V_{e+}^e = V_{in}$$

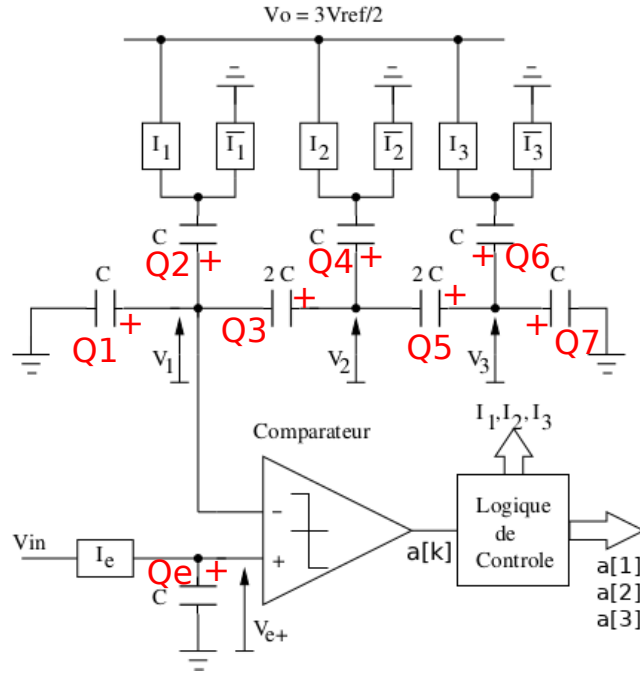


FIGURE 4 – Conversion analogique-numérique

$$\begin{aligned}
 Q_1[1] &= CV_1[1] & Q_2[1] &= C(V_1[1] - V_0) & Q_3[1] &= 2C(V_2[1] - V_1[1]) \\
 Q_4[1] &= CV_2[1] & Q_5[1] &= 2C(V_3[1] - V_1[1]) & Q_6[1] &= CV_3[1] & Q_7[1] &= CV_3[1]
 \end{aligned}$$

Nous avons par ailleurs une conservation de charge au points V_1 , V_2 et V_3 , ça se traduit par

$$Q_1[1] + Q_2[1] - Q_3[1] = Q_1[0] + Q_2[0] - Q_3[0] = 0 \text{ tous les } Q_i[0] = 0 \text{ car le système est ré-initialisé à } t=0$$

Meme chose aux points V_2 et V_3 :

$$Q_3[1] + Q_4[1] - Q_5[1] = 0$$

$$Q_5[1] + Q_6[1] + Q_7[1] = 0$$

En remplaçant les charges dans les équation de convesation, en commençant par la dernière comme conseillé dans l'énoncé, on obtient $V_1[1] = 2V_2[1] = 4V_3[1]$ et $V_1 = V_0/3 = V_{ref}/2$.

- $a[1] = 1$ si $V_{in} \geq V_{ref}/2$
- $a[1] = 0$ sinon

Après $\Phi_b[1]$, nous passons à la sous-phase $\Phi_b[2]$. Le tableau 3 gauche représente la commande des interrupteurs. À la fin de cette sous-phase, la sortie du comparateur est $a[2]$.

Question 3.2 Déterminer $V_1[2]$, la valeur de V_1 à la sous-phase $\Phi_b[2]$, en fonction de V_{ref} et $a[1]$ et en déduire $a[2]$.

Réponse 3.2 On refait la meme analyse mais en utilisant la configuration du tableau 3 gauche.

$$Q_e[2] = Q_e[1] \quad \Rightarrow \quad V_{e+}[2] = V_{e+}[1] = V_{in}$$

I_e	I_1	I_2	I_3
1	0	0	0

I_e	I_1	I_2	I_3
0	1	0	0

TABLE 2 – Commande des interrupteurs : à gauche pour (Φ_e) , à droite pour $(\Phi_b[1])$

I_e	I_1	I_2	I_3
0	$a[1]$	1	0

I_e	I_1	I_2	I_3
0	$a[2]$	$a[1]$	1

TABLE 3 – Commande des interrupteurs : à gauche pour $(\Phi_b[2])$, à droite pour $(\Phi_b[3])$

On calcule la conservation aux points V_1 , V_2 et V_3 . On commence par V_1

$$Q_1[2] + Q_2[2] - Q_3[2] = Q_1[1] + Q_2[1] - Q_3[1] \text{ on avait montré que cette somme vaut } 0$$

Même chose aux points V_2 et V_3 :

$$Q_3[2] + Q_4[2] - Q_5[2] = 0$$

$$Q_5[2] + Q_6[2] + Q_7[2] = 0$$

$$Q_1[2] = CV_1[2] \quad Q_2[2] = C(V_1[2] - a[1]V_0) \quad Q_3[2] = 2C(V_2[2] - V_1[2])$$

$$Q_4[2] = C(V_2[2] - V_0) \quad Q_5[2] = 2C(V_3[2] - V_1[2]) \quad Q_6[2] = CV_3[2] \quad Q_7[2] = CV_3[2]$$

On en déduit que $2V_2[2] = 2V_3[2]$, $V_2[2] = V_1[2]/2 + V_0/4$ et $V_1[2] = a[1]V_{ref}/2 + V_{ref}/4$

- $a[2] = 1$ si $V_{in} \geq a[1]V_{ref}/2 + V_{ref}/4$
- $a[2] = 0$ sinon

Nous passons à la sous-phase $\Phi_b[3]$. Le tableau 3 droite représente la commande des interrupteurs. À la fin de cette sous-phase, la sortie du comparateur est $a[3]$.

Question 3.3 Déterminer $V_1[3]$, la valeur de V_1 à la sous-phase $\Phi_b[3]$, en fonction de V_{ref} , $a[1]$ et $a[2]$ et en déduire $a[3]$.

Réponse 3.3 De même façon, nous avons :

$$V_{e+}[3] = V_{in}$$

$$V_1[3] = a[1]V_{ref}/2 + a[2]V_{ref}/4 + V_{ref}/8$$

- $a[3] = 1$ si $V_{in} \geq a[1]V_{ref}/2 + a[2]V_{ref}/4 + V_{ref}/8$
- $a[3] = 0$ sinon

Question 3.4 Que représentent $a[1]$, $a[2]$ et $a[3]$? Quel type d'architecture de convertisseur réalise ce circuit ?

Réponse 3.4 $a[1]$, $a[2]$ et $a[3]$ représentent la sortie numérique d'un convertisseur analogique-numérique de 3 bits de résolution. Un CAN SAR