Contrôle - ELEC101 -1$^{\text{ère}}$ année 2021-2022

Date : 15/06/2022

Heure : 15h15

Durée 1h30 - Documents et Calculatrice autorisés

Exercice 1 - Amplification

On considère le montage de la Figure 1.

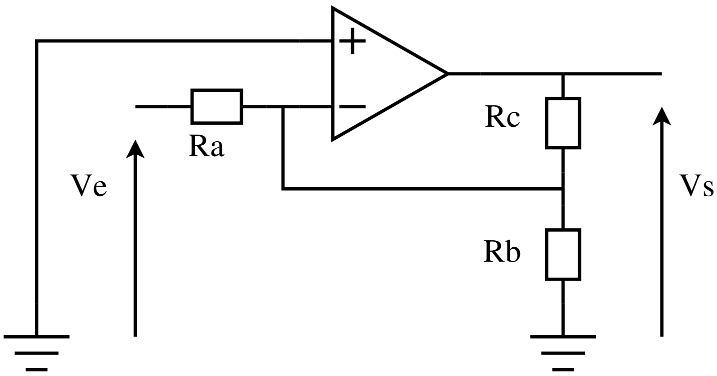

Figure 1 – Montage à amplificateur opérationnel

On suppose en premier lieu que l'amplificateur opérationnel est idéal.

Question 1.1 Déterminer la relation entre la tension Vs et Ve. Quelle est l'opération réalisée par ce montage ?

Réponse 1.1 Comme l'AOp est idéal on a : $V^+ = V^- = 0$ et $i^+ = 0$ et $i^- = 0$. Cela implique que : $Vs = Rc \cdot Ic = -\frac{Rc}{Ra} Ve$ Ainsi ce circuit est un circuit amplificateur inverseur.

On suppose à présent que l'amplificateur opérationnel est parfait pour toutes ses caractéristiques sauf pour son gain linéaire qui est donné par :

$$A(p) = \frac{A_0}{1+\tau p} \quad \text{et} \quad \epsilon \neq 0 \tag{1}$$

Question 1.2 En considérant le réseau de résistances Ra, Rb, Rc démontrer que $V^-(p) = K_R \cdot (Rc \cdot Ve(p) + Ra \cdot Vs(p))$ où $K_R = \frac{Rb}{Ra \cdot Rb + Ra \cdot Rc + Rb \cdot Rc}$

Réponse 1.2 on a :

- $V^-(p) = Rb \cdot Ib(p)$
- $Ve(p) - V^-(p) = Ra \cdot Ia(p) \quad \Rightarrow \quad Ia(p) = \frac{Ve(p) - V^-(p)}{Ra}$

- $Vs(p) = Rc \cdot Ic(p) + Rb \cdot Ib(p) \qquad \Rightarrow \qquad Ic(p) = \frac{Vs(p) - Rb \cdot Ib(p)}{Rc}$
- $Ia(p) + Ic(p) = Ib(p)$

On réinjecte Ia et Ic dans la dernière équation pour obtenir :

$$Ib(p) = \frac{Rc \cdot Ve(p) + Ra \cdot Vs(p)}{Ra \cdot Rb + Ra \cdot Rc + Rb \cdot Rc} \tag{2}$$

$V^{-}(p) = K_R \cdot (Rc \cdot Ve(p) + Ra \cdot Vs(p))$ où $K_R = \frac{Rb}{Ra \cdot Rb + Ra \cdot Rc + Rb \cdot Rc}$

Question 1.3 En considérant l'équation de l'amplificateur opérationel $Vs(p) = A(p) \cdot \epsilon(p)$ Déterminer la nouvelle relation entre la tension $Vs(p)$ et $Ve(p)$ et retrouver le résultat de la Question 1 lorsque A_0 tend vers l'infini.

Réponse 1.3 Par hypothèse on a : $Vs(p) = A(p) \cdot \epsilon(p) = -A(p) \cdot V^{-}(p)$

On réinjecte cette expression de $V^{-}(p)$ dans $Vs(p) = -A(p) \cdot V^{-}(p)$ pour trouver :

$$Vs(p)\,(1 + A(p) \cdot K_R \cdot Ra) = -A(p) \cdot K_R \cdot Rc \cdot Ve(p) \tag{3}$$

Ainsi on a :

$$\frac{Vs(p)}{Ve(p)} = \frac{-A(p) \cdot K_R \cdot Rc}{1 + A(p) \cdot K_R \cdot Ra} \tag{4}$$

Notamment, si on a $A(p) \to \infty$, on obtient :

$$\frac{Vs(p)}{Ve(p)} = \frac{-A(p) \cdot K_R \cdot Rc}{1 + A(p) \cdot K_R \cdot Ra} \qquad \underset{A(p)\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{Rc}{Ra} \tag{5}$$

ce qui est le résultat de la question 1.

Question 1.4 Donner la pulsation de coupure ω_0 du système.

Réponse 1.4 $\omega_0 = \frac{1 + A_0 \cdot K_R \cdot Ra}{\tau}$

Exercice 2 - Capacités commutées

Les montages a,b et c présentés Figure 2 supposent les capacités et les commutateurs parfaits. La fréquence d'échantillonnage f_e est égale à 1 MHz. $C_2 = C_3 = 10$ pF.

Question 2.1 Calculer les fonctions de transfert des circuits A et B, $H_A(z)$ et $H_C(z)$ respectivement. En déduire la fonction de transfert $H_C(z)$ du circuit C ?

Réponse 2.1 $H_A(z) = \frac{1}{1 + \frac{C_2}{C_1}(1 - z^{-1})}$, $H_B(z) = \frac{\frac{C_3}{C_4}(1 - z^{-1})}{1 + \frac{C_3}{C_4}(1 - z^{-1})}$, $H_C(z) = H_A(z)H_B(z)$

Question 2.2 En utilisant l'approximation $e^{-j\omega T_e} \underset{\omega \ll \frac{1}{Te}}{\approx} 1 - j\omega Te$, démontrer que la réponse fréquentielle du circuit C peut se mettre sous forme

$$H_T(\omega) = \frac{j\omega k_2 T_e}{(1 + j\omega k_1 T_e)(1 + j\omega k_2 T_e)}, \; avec \; k_1 = \frac{C_2}{C_1} \; k_2 = \frac{C_3}{C_4}$$

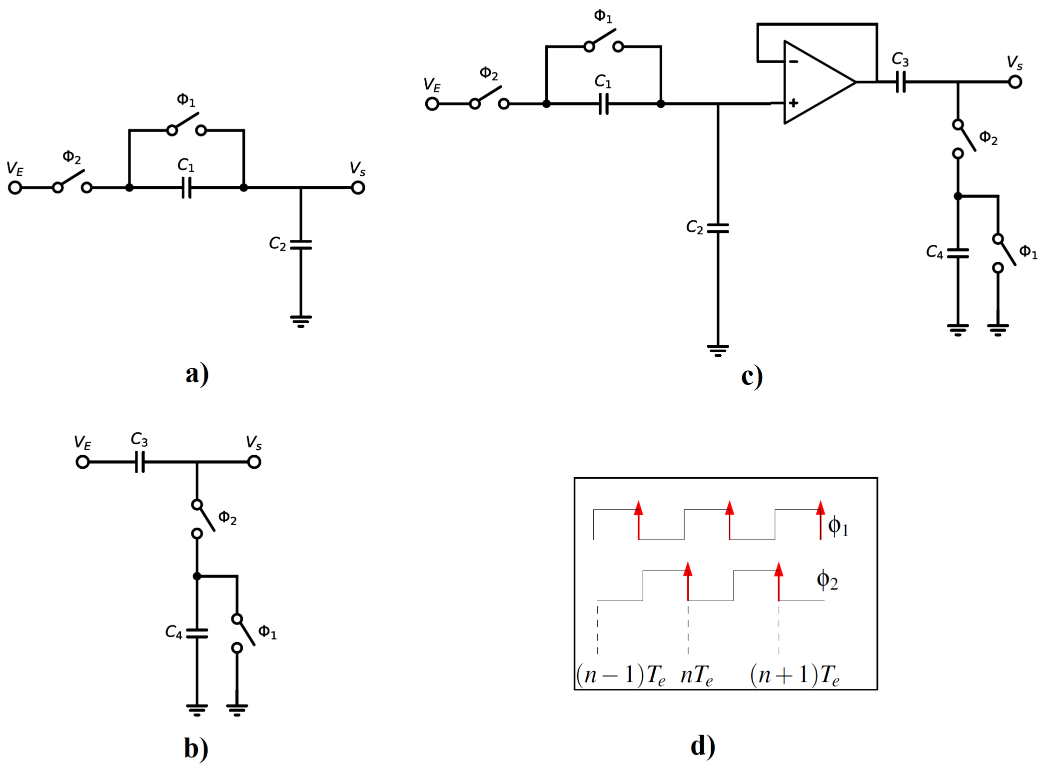

FIGURE 2 – a) Circuit A. b) Circuit B. C) Circuit C. d) Diagramme de commutation des interrupteurs

Réponse 2.2 Il suffit de remplacer $z^{-1} = e^{-j\omega T_e}$ par $1 - j\omega T_e$ dans l'expression de $H_C(z)$.

Question 2.3 Quelle est la fonction réalisée par ce circuit ? (Considérez que $k_2 < k_1$)

Réponse 2.3 La fonction de transfert a un zéro à la fréquence 0 et deux poles. La fonction réalisée est donc un filtre passe bande.

Question 2.4 Calculer C_1 et C_4 pour que la bande passante du filtre soit de $f_1 = 1$ kHz à $f_2 = 10$ kHz ?

Réponse 2.4 $C_4 = 628.3\ fF$ et $C_1 = 62.83\ fF$

Exercice 3 - Filtrage

Serge est amateur de Lama et musicien, il souhaite enregistrer une chanson. Cependant, sa voisine Lara perturbe ses enregistrements avec ses capteurs ultra-sons. Serge décide donc de filtrer ces fréquences ultra-sons avant de faire l'acquisition en numérique. Il détermine qu'il faut atténuer toutes les fréquences supérieures à 50 kHz d'au moins 40 dB et que l'atténuation doit etre inférieure à 0.5 dB dans la bande utile [0-20 kHz].

Question 3.1 Déterminer le gabarit du filtre passe-bas requis pour l'application.

Réponse 3.1 Amin=40 dB, Amax=0.5 dB, f1=20 kHz, f2=50 kHz

Question 3.2 Déterminer le paramètre de sélectivité Ω_s et le gabarit du filtre prototype passe-bas (normalisé).

Réponse 3.2 $\Omega_s = 2.5$

Serge décide d'utiliser une approximation de Tchebycheff pour ce filtre. Les polynômes de Tchebycheff s'expriment par :
$\forall x \geq 1, T_n(x) = \mathrm{ch}(n \,\mathrm{argch}(x))$, où ch représente le cosinus hyperbolique et argch l'argument du cosinus hyperbolique [1], réciproque de la fonction ch.

Question 3.3 En déduire l'ordre du filtre requis.

Réponse 3.3 D = 286.26, n>acosh(286.26)/acosh(2.5) =4.0529 donc n=5

Exercice 4 - Conversion

On considère un sytème de réception pour un signal 5G utilisant une architecture homodyne. Après le mixage, le spectre du signal est comme présenté en Fig.3 :

- le signal utile de 0 à 10 MHz
- interférence 1 de 10 à 30 MHz
- interférence 2 de 30 à 50 MHz

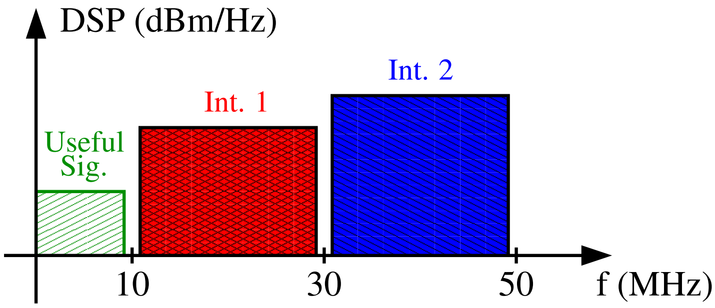

FIGURE 3 – Spectre du signal à l'entrée du CAN

On souhaite faire l'acquisition de ce signal avec un convertisseur analogique numérique. Le rapport signal sur bruit (SNR) doit être supérieur à 72 dB afin d'assurer une bonne qualité de signal pour la démodulation.

Question 4.1 Quelle est la fréquence d'échantillonnage minimale F_{smin} que l'on peut utiliser pour acquérir ce signal ? Que faudra-t-il ajouter dans la chaîne de réception pour garantir l'intégrité du signal (pour que le signal utile ne soit pas déformé après échantillonnage) ?

Réponse 4.1 Le signal a une bande de 10 MHz, il faut donc l'échantillonner à 20 MHz. Il faudra ajouter un filtre anti-repliement car les interférences seront repliées sur le signal utile

1. $\mathrm{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ pour $x \geq 1$

Question 4.2 En supposant que le signal occupe la pleine échelle du convertisseur, calculer le nombre de bits n nécessaire pour satisfaire les contraintes.

Réponse 4.2 On sait que s'il y a pas de suréchantillonnage et si le signal utile occupe la plein échelle : $SNR = 6.02n + 1.76$. On en déduit qu'il nous faut $n = 11.67$ donc on prendra 12 bits

Afin de réduire la complexité du convertisseur, on souhaite réduire le nombre de bit du convertisseur à 9. Pour cela on met en place du sur-échantillonnage afin d'échantillonner le signal à la fréquence $F_s = F_{Smin} * OSR$.

Question 4.3 Calculer le taux de sur-échantillonnage (OSR) nécessaire pour réduire le nombre de bits à 9. En déduire la nouvelle fréquence d'échantillonnage.

Réponse 4.3 $SNR = 6.02n + 1.76 + 10\log_{10}(OSR)$ on trouve $OSR = 40.3$ et donc $F_s =$ 803 MHz

Question 4.4 Quel sera l'autre avantage de sur-échantillonner sur la chaîne de réception ?

Réponse 4.4 Plus besoin du filtre anti-repliement en analogique vu qu'on fait l'acquisition du signal et des intérféreurs. Le filtrage pourra se faire dans le domaine numérique.

Question 4.5 Expliquez en quoi le sur-échantillonnage permet de réduire le nombre de bits. Pour cela on représentera l'allure de la densité spectrale de puissance du bruit de quantification avec et sans sur-échantillonnage et on explicitera le lien entre les deux.

Réponse 4.5 Le bruit de quantification total est identique donc si on sur-échantillonne on étale le bruit sur plus large donc on baisse la DSP.

On souhaite réaliser le convertisseur en utilisant une architecture sigma-delta présentée en Figure 4. Une telle architecture s'appuie sur le sur-échantillonnage et la mise en forme du bruit.

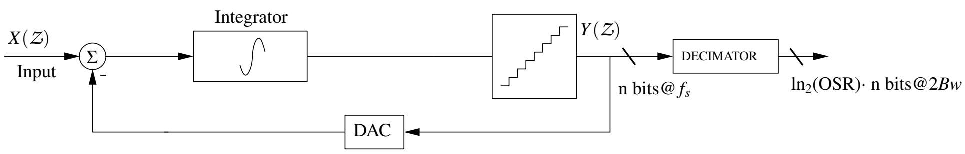

FIGURE 4 – Architecture du convertisseur sigma-delta

Cette mise en, forme du bruit se traduit par une fonction de transfert du convertisseur sur le bruit donnée par $H(z) = 1 - z^{-1}$. Ainsi le bruit de quantification est filtré par le convertisseur avec une fonction de transfert donnée par $H(z)$.

Question 4.6 Tracer l'allure de la réponse en fréquence $|H(e^{j\omega T_s})|$ entre les fréquences 0 et $F_s/2$. En déduire l'effet du convertisseur sur le bruit ainsi que la conséquence sur le SNR.

Réponse 4.6 La réponse tend vers 0 pour les fréquences nulles et tend vers 2 pour $F_s/2$. Le bruit est repoussé dans les hautes fréquences. Sur la plage de fréquence d'intéret le bruit est réduit.